TRATTATO ELEMENTARE

SULLA

MECCANICA RAZIONALE

CON MOLTI ESEMPII

Compilato sulle opere di TODHUNTER, TAIT, STEELE, ROUTH ed altri [illegible].

DA

G. BATTAGLINI

PROFESSORE DI GEOMETRIA SUPERIORE NELLA UNIVERSITA' DI ROMA.

VOLUME SECONDO

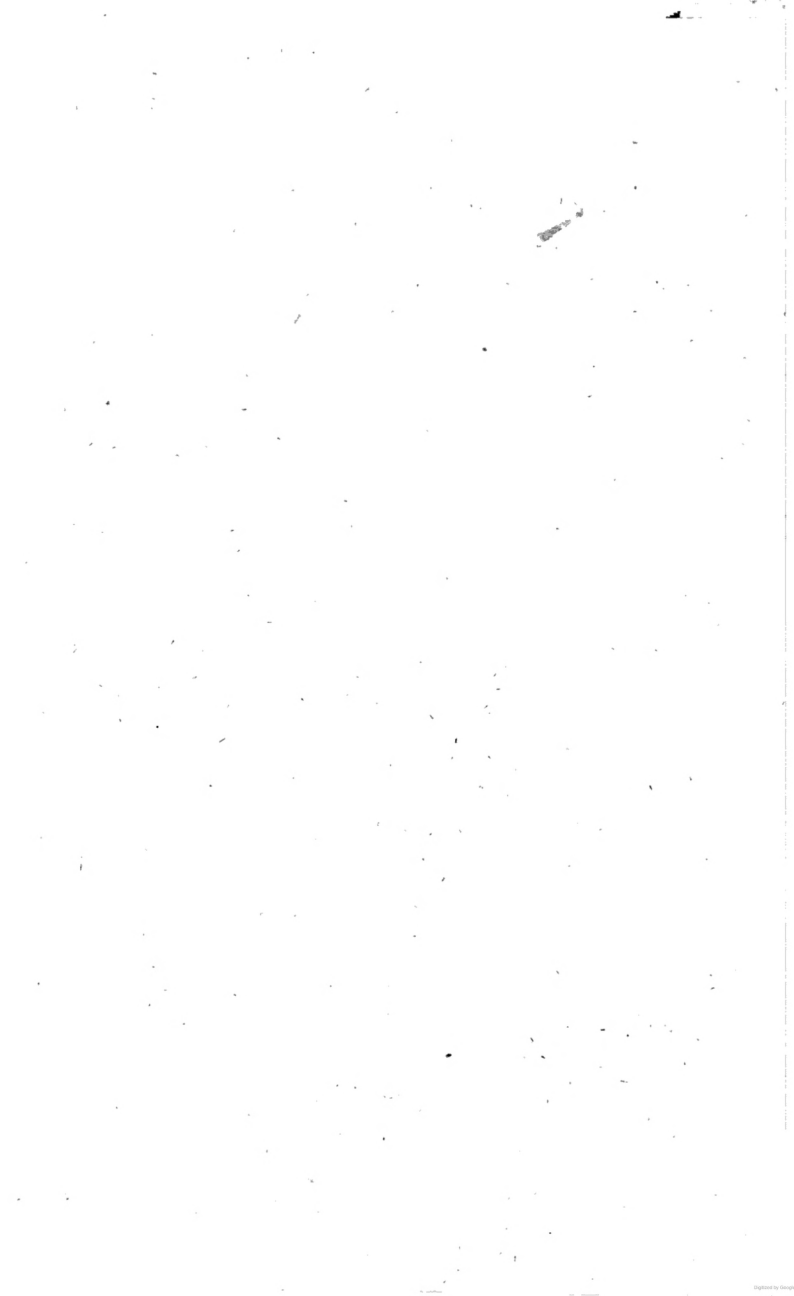
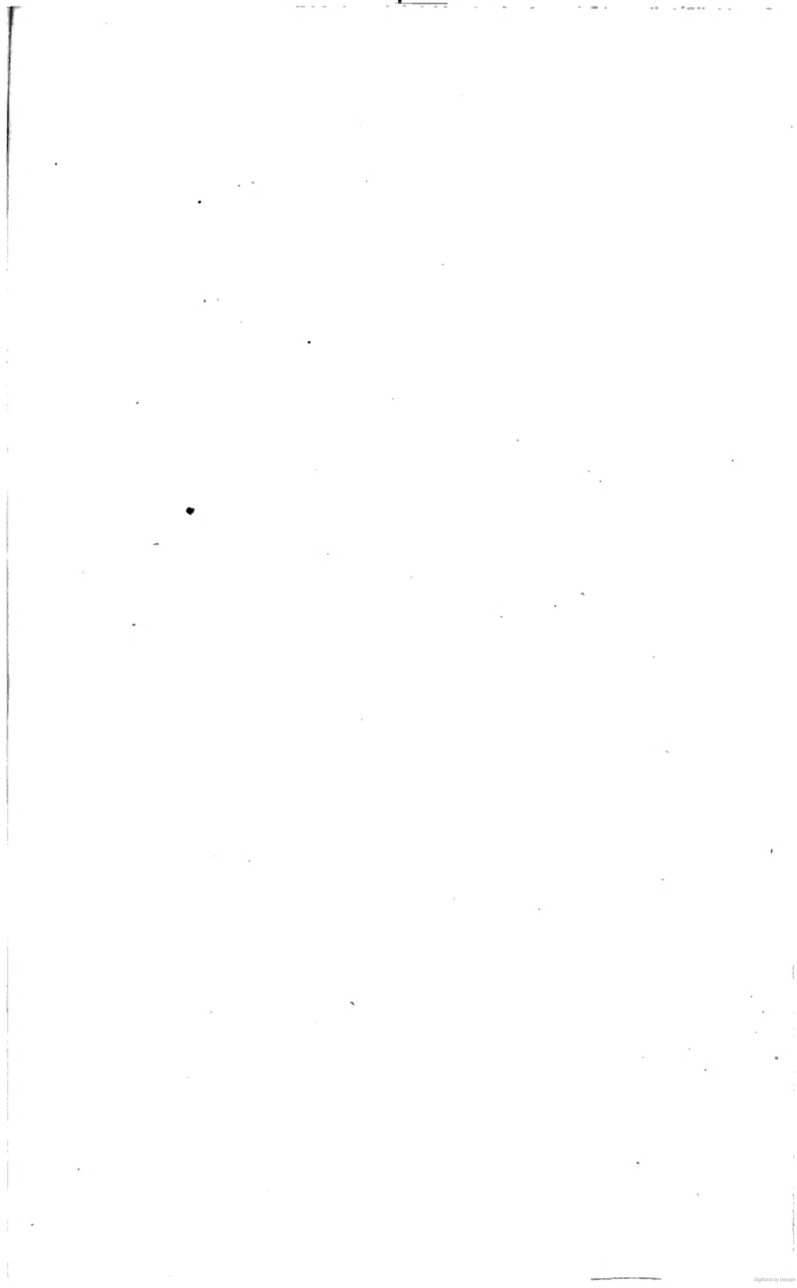
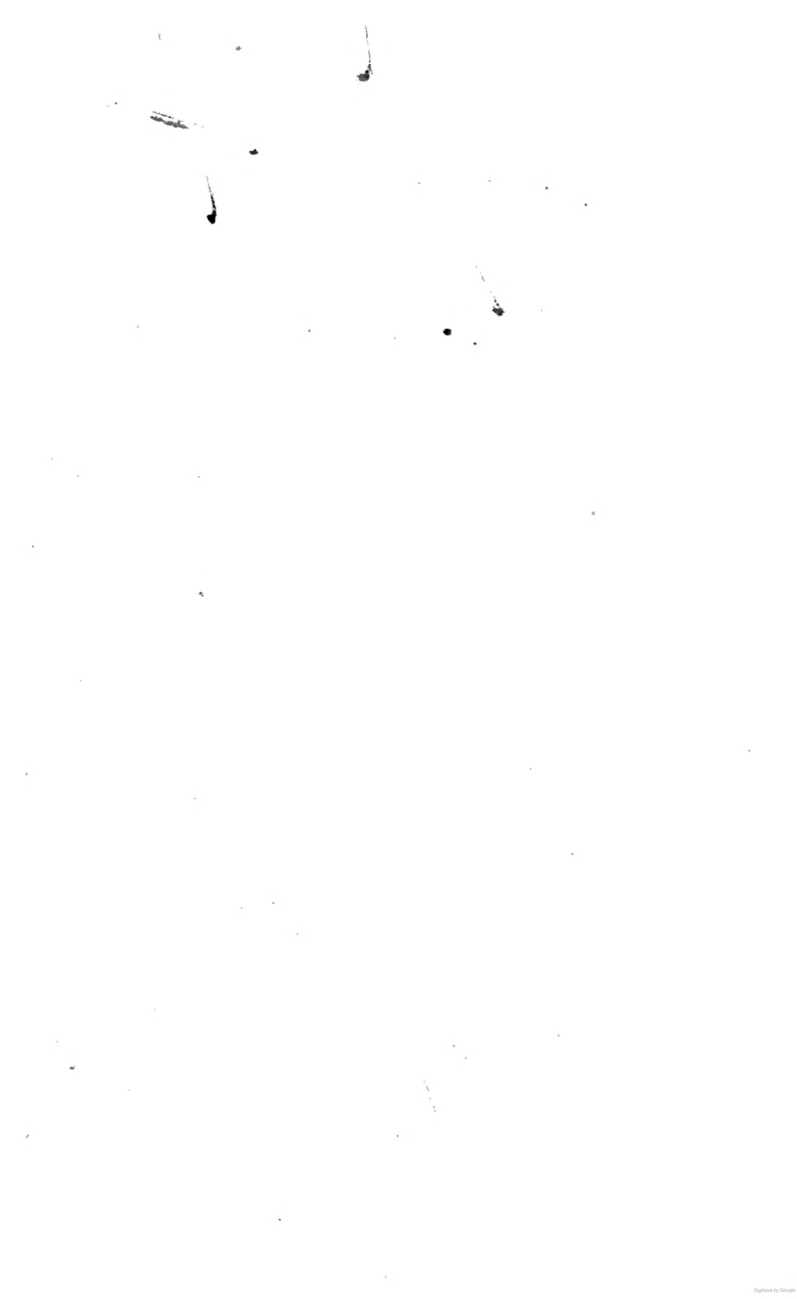
NAPOLI

LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE

DI B. PELLERANO

Strada di Chiaia 60.

1873.

Prezzo dei 2 volumi L. 12.

TRATTATO ELEMENTARE

SULLA

MECCANICA RAZIONALE

TRATTATO ELEMENTARE

SULLA

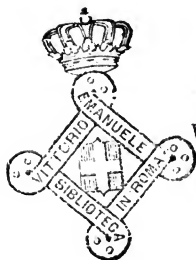
MECCANICA RAZIONALE

CON MOLTI ESEMPII

Compilato sulle opere di TODHUNTER, TAIT, STEELE, ROUTH ed altri autori:

DA

G. BATTAGLINI

PROFESSORE DI GEOMETRIA SUPERIORE NELLA UNIVERSITÀ DI ROMA.

VOLUME SECONDO

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI B. PELLERANO
Strada di Chiaia 60.
1873.

INDICE DEL SECONDO VOLUME.

DINAMICA DI UN ELEMENTO.

DINAMICA DI UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI.

IDROSTATICA.

IDRODINAMICA.

DINAMICA DI UN ELEMENTO.

CAPITOLO IX.

Teoremi generali.

229. Ci proponiamo ora di dimostrare alcuni dei teoremi generali relativi al moto di un elemento sotto l'azione di forze qualunque, e d'investigare le forze richieste per la descrizione di date traiettorie in una data maniera. Alcuni di questi risultati si presentarono già come conseguenze immediate delle leggi del moto; ma per mantenere il carattere speciale dell'opera diamo delle formali dimostrazioni analitiche, sebbene siano certamente superflue.

230. *Se un elemento è soggetto all'azione di forze, la di cui risultante è continuamente ad angoli retti alla direzione del moto; la velocità dell'elemento sarà uniforme.*

Sia R questa risultante, e siano λ, μ, ν, i suoi coseni di direzione, allora se la massa dell'elemento si prende per unità, le equazioni del moto sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda R ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu R ,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \nu R .$$

Moltiplicando per $\frac{dx}{dt}$, ..., addizionando, ed osservando che

$$\lambda \frac{dx}{ds} + \mu \frac{dy}{ds} + \nu \frac{dz}{ds} = 0$$

poichè la forza R è ad angoli retti all'elemento della traiettoria,

abbiamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 0 ;$$

quindi

$$v = \text{cost.}$$

O pure, potremmo risolvere immediatamente secondo l'arco; questo darebbe

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0 ;$$

di cui l'integrale è

$$\frac{ds}{dt} = v = \text{cost.}$$

Il valore di R (Art. 17, 63) è evidentemente $\frac{v^2}{\rho}$; e quindi R varia inversamente come il raggio di curvatura assoluta della traiettoria. È chiaro che la sua direzione giace nel piano osculatore, poichè non vi è accelerazione perpendicolarmente a quel piano.

231. Es. I. *Un elemento proiettato in un piano è sollecitato da una forza costante* R *in quel piano continuamente perpendicolare alla direzione del moto*; *trovare la traiettoria descritta.*

Qui $R = \frac{v^2}{\rho}$; e quindi ρ è costante, o la traiettoria è un circolo.

Es. II. *Varii* R *come il tempo scorso dal principio del moto; allora* $R = R_0 t$.

Inoltre s, l'arco della curva descritta nello stesso tempo, $=vt$, poichè v è costante.

Quindi abbiamo

$$R = \frac{v^2}{\rho} = R_0 \frac{s}{v} ;$$

onde

$$\rho s = \text{cost.} = c^2 \text{ supponiamo.}$$

Se ψ è l'angolo che la direzione dell'elemento δs fa con una linea fissa,

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} ;$$

e quindi

$$s\frac{ds}{d\psi} = c^2 ,$$

l'integrazione della quale dà

$$s^2 = 2c^2(\psi + C) ,$$

l'equazione intrinseca della curva descritta.

232. *Se* X, Y, Z *sono le componenti rettangolari di una forza o di forze come quelle che s' incontrano in natura, cioè che tendono a centri fissi e sono funzioni delle distanze da questi centri,*

$$Xdx + Ydy + Zdz = -dV,$$

cioè è un differenziale completo. Si confronti l' Art. 72.

Siano i punti $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2;$ etc. le posizioni dei centri di forza; x, y, z le coordinate dell' elemento attratto; allora, se $r_1, r_2, \ldots$ sono le sue distanze dai centri,

$$\varphi_1'(D), \quad \varphi_2'(D), \text{ etc. },$$

le leggi di attrazione a quei centri; abbiamo

$$X = \frac{a_1 - x}{r_1}\varphi_1'(r_1) + \frac{a_2 - x}{r_2}\varphi_2'(r_2) + \ldots$$

$$= \Sigma \frac{a - x}{r}\varphi'(r).$$

Ma $$r = \sqrt{\{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2\}};$$

che dà $\left(\frac{dr}{dx}\right) = -\frac{a-x}{r}$, etc.; per i valori dei coefficienti differenziali parziali di r.

Quindi

$$X = -\Sigma\varphi'(r)\left(\frac{dr}{dx}\right),$$

$$Y = -\Sigma\varphi'(r)\left(\frac{dr}{dy}\right),$$

$$Z = -\Sigma\varphi'(r)\left(\frac{dr}{dz}\right).$$

Queste danno

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

$$= -\Sigma\varphi'(r)\left\{\left(\frac{dr}{dx}\right)dx + \left(\frac{dr}{dy}\right)dy + \left(\frac{dr}{dz}\right)dz\right\}$$

$$= -\Sigma\varphi'(r)\,dr = -dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

poichè ogni termine della somma è un differenziale completo. Dall' Art. 72 è ovvio che V è l' energia potenziale dell' unità di materia in x, y, z.

233. *Sotto l'azione di forze qualunque come quelle che s' incontrano in natura l' accrescimento del quadrato della velocità di un elemento nel passare da un punto ad un altro è indipendente dalla traiettoria percorsa, e dipende solamente dalle posizioni iniziale e finale. Questo è vero anche se l' elemento è costretto a muoversi in una linea particolare da una forza continuamente perpendicolare alla sua direzione del moto, come la resistenza di una curva o di una superficie levigata.*

Se scegliamo la risoluzione tangenziale, la forza di resistenza non ha componente in quella direzione, e l' equazione del moto è

$$\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds},$$

che diviene per (1),

$$\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} = -\Sigma\varphi'(r)\frac{dr}{dt} = -\frac{dV}{dt}.$$

Quindi $$\frac{v^2}{2} = C - \Sigma\varphi(r) = C - V.$$

Quindi, se U è la velocità in un punto di cui le distanze dai centri sono $R_1, R_2, \ldots$, e dove $V = V_1$,

$$\frac{v^2}{2} - \frac{U^2}{2} = \Sigma\varphi(R) - \Sigma\varphi(r) = V_1 - V,$$

un risultato che contiene solamente le coordinate delle posizioni iniziale e finale. Si vegga, ancora, l' Art. 72.

234. Quindi se da un punto qualunque della superficie

$$V = \Sigma\varphi(r) = A,$$

un elemento è proiettato con una data velocità in una direzione qualunque; la sua velocità quando incontra la superficie

$$V = \Sigma\varphi(r) = B,$$

sarà la stessa, in qualunque punto esso incontri quella superficie; A e B essendo delle costanti qualunque.

Ora per l' equazione (1),

$$V = \Sigma\varphi(r) = \text{costante}$$

è l' equazione di una superficie sulla quale se levigata un ele-

mento resterà in quiete in ogni posizione sotto l'azione delle forze date.

Quindi un elemento che lascia un punto qualunque di una superficie di equilibrio con una data velocità, avrà nel raggiungere ogni altra superficie di equilibrio una velocità indipendente dalla linea percorsa o dal punto di arrivo. Questo è evidente dall'Art. 72 se notiamo che una superficie di equilibrio è una *Superficie Equipotenziale.*

235. *Trovare la condizione alla quale le forze applicate debbono essere soggette quando la forza viva di un elemento dipende solamente dalla sua posizione.* Questo è semplicemente l'inverso dell' Art. 232.

Qui abbiamo

$$\frac{1}{2}v^2 = \varphi(x, y, z),$$

e, quindi,

$$vdv = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)dz.$$

Ma, in tutt' i casi di movimento,

$$v\,dv = X\,dx + Y dy + Z\,dz.$$

Quindi, in questo caso dobbiamo avere

$$X = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \quad Y = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right), \quad Z = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right);$$

cioè,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

deve essere il differenziale di una funzione di tre variabili indipendenti.

Se il seggio della forza è in un determinato punto fisso, che si può prendere come origine, la velocità può evidentemente dipendere solamente dalla *distanza* da quel punto, non dalla *direzione* della distanza; quindi, se

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

abbiamo

$$\frac{1}{2}v^2 = \varphi(r).$$

Il procedimento precedente dà, in questo caso,

$$vdv = X\,dx + Y dy + Z\,dz = d\varphi(r)$$
$$= \varphi'(r)\left(\frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz\right),$$

o
$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

le quali mostrano che *la forza è nella direzione di* r.

Da questo inoltre segue evidentemente che *la sua grandezza deve essere una funzione di* r.

236. La proposizione dell'Art. 233 contiene il Principio della Conservazione dell'Energia, o, come prima si diceva, il *Principio della Forza Viva*; per il caso di un solo elemento.

Da questo principio ne segue che se più elementi che si muovono sotto l'azione dello stesso centro di forza hanno velocità eguali ad una distanza particolare dal loro centro; le loro velocità saranno sempre eguali ad eguali distanze da quel centro.

Ora abbiamo veduto (Art. 137) che l'asse maggiore, $2a$, di un'orbita ellittica intorno ad un centro di forza nel fuoco è indipendente dalla direzione della proiezione. Quindi, considerando il caso particolare di un'ellisse molto stretta, vediamo che la velocità in ogni punto è dovuta ad una caduta, dalla quiete ad una distanza $2a$, sino a quel punto; e che, perciò, in un'orbita ellittica qualunque intorno ad un fuoco la velocità in ogni punto è quella dovuta ad una caduta sino al punto, per uno spazio eguale alla distanza dall'altro fuoco.

237. *Se le forze agenti sopra un elemento, ed il quadrato della sua velocità, si accrescono ad ogni istante nello stesso rapporto, la traiettoria non sarà alterata.*

Infatti la tangente, ed il piano osculatore, che contengono la forza tangenziale e la risultante, evidentemente non si alterano. E la curvatura, essendo Art. 63,

$$\frac{\text{Componente normale delle Forze}}{\text{Quadrato della velocità}}$$

ha il suo numeratore e denominatore accresciuti nello stesso rapporto. Ed il quadrato della velocità alla fine di ogni arco è accresciuto nello stesso rapporto come quello al principio. Quindi ciascun successivo arco elementare della traiettoria rimane invariato.

238. *Se più elementi separati di cui le masse sono* m_1, m_2, etc. *assoggettati all' azione delle forze* f_1, f_2; etc. *rispettivamente, e successivamente proiettati dallo stesso punto nella stessa direzione con le velocità* v_1, v_2, etc. *descrivono tutti una traiettoria; la stessa traiettoria sarà anche descritta da un elemento di massa*

M *proiettato con velocità* U *dallo stesso punto nella stessa direzione, e sollecitato ad un tempo dalle stesse forze* f_1, f_2, etc. *purchè*

$$MU^2 = \Sigma (mv^2).$$

Supponiamo che, in aggiunta alle forze f_1, f_2 etc. si richieda una forza R agente continuamente in una direzione ad angoli retti con quella del movimento di M per fare che esso si muova nella data traiettoria; cioè supponiamo che M sia costretto da un tubo levigato a muoversi nella traiettoria richiesta; le equazioni del moto sono

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma (X) + R\lambda \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1),$$

con simili equazioni in y e z,

dove λ, μ, ν sono i coseni di direzione di R, ed X, Y, Z le parti risolute di f.

Moltiplicando per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ in ordine, ed addizionando, eliminiamo R ed abbiamo

$$\frac{1}{2} Md(U^2) = \Sigma (X)\, dx + \Sigma (Y)\, dy + \Sigma (Z)\, dz.$$

Ma per gli elementi separati m_1, m_2, etc. abbiamo

$$\frac{1}{2} m_1\, d(v_1^2) = X_1\, dx + Y_1\, dy + Z_1\, dz, \text{ etc.};$$

quindi, la traiettoria essendo la stessa per tutti,

$$\frac{1}{2} \Sigma \{ md(v^2) \} = \Sigma (X)\, dx + \Sigma (Y)\, dy + \Sigma (Z)\, dz.$$

Quindi $\Sigma \{md(v^2)\} = Md(U^2)$,

o $$\Sigma (mv^2) = MU^2 + C.$$

Ma, per ipotesi, $\Sigma mv^2 = MU^2$,

quindi $$C = 0.$$

[Invece di questa analisi, è sufficiente (per l' Art. 72) di notare che il lavoro fatto su di M è la somma di quelli fatti su di m_1, m_2, etc. Quindi l' *accrescimento* di energia cinetica deve essere la stessa; e se, nel principio, l'energia cinetica di M è la somma di quelle di m_1, m_2; etc. essa rimarrà tale durante il moto].

Quindi la forza viva di M sarà in ciascun punto dell'orbita eguale alla somma delle forze vive di m_1, m_2, etc., in quel punto. Per trovare R, si noti che in generale la pressione su di una curva resistente dipende da due cose, le parti risolute delle forze impresse, e la pressione dovuta alla velocità. Ora l'ultima parte è come la forza viva, quindi nel caso di M essa è la somma delle forze corrispondenti nel caso di m_1, m_2, etc. Ancora lo stesso si può dire delle parti risolute delle forze impresse. Ma nel caso di ciascun elemento, queste pressioni parziali si distruggono scambievolmente, poichè la curva era descritta liberamente, quindi le loro somme si distruggeranno scambievolmente, o sia la curva sarà descritta liberamente da M.

239. *Se ad un istante qualunque la velocità di un elemento materiale, che si muove sotto l'azione di un sistema conservativo di forze, Art. 71, è invertita, l'elemento descriverà la sua traiettoria primitiva nella direzione inversa.*

Supponiamo un tubo levigato, nella forma della traiettoria primitiva, richiesto per costringere l'elemento a muoversi indietro lungo di essa. La velocità sarà, in ogni punto, della stessa grandezza come prima (Art. 233); la forza risultante, e la curvatura della traiettoria, saranno ancora le stesse; quindi la componente normale della forza produrrà la richiesta curvatura della traiettoria, e non vi sarà alcuna pressione sul tubo resistente. Il tubo, perciò, non è richiesto. Quindi la proposizione.

240. Minima, o Stazionaria, Azione. Se v è la velocità di un elemento di cui la massa è m, e se s è l'arco della traiettoria descritta, il valore della quantità

$$A = m \int v ds.$$

(presa tra i proprii limiti) si chiama l'*Azione* dell'elemento.

Se un elemento si muove liberamente, o sopra una superficie levigata, (sotto l'azione di forze come quelle che s'incontrano in natura), tra due punti qualunque, il valore dell'integrale $m\int vds$ *per l'intera traiettoria attuale è generalmente minore di quello che sarebbe se l'elemento fosse costretto a passare da un punto all'altro per una traiettoria differente.* Questo, combinato con la suddetta definizione, è per un solo elemento il *Principio della Minima Azione*; di cui in un'opera elementare come la presente possiamo dare solamente uno schizzo molto imperfetto. Per ulteriore informazione si vegga la *Natural Philosophy* di Thomson e Tait, Art. 318.

241. La proposizione da dimostrare è che, δ essendo il simbolo del Calcolo delle Variazioni, e la massa dell'elemento essendo per semplicità presa come unità,

$$\delta A = \delta \int v ds = 0.$$

Ora
$$\delta \int v ds = \int \delta (v ds) = \int (v \delta ds + ds \delta v)$$
$$= \int (v \delta ds + dt\, v \delta v), \text{ poichè } v = \frac{ds}{dt}.$$

Ma generalmente,

$$\frac{1}{2} v^2 = \int (X dx + Y dy + Z dz) = \psi (x, y, z),$$

la forza di resistenza, se vi è, essendo scomparsa;

quindi
$$v \delta v = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

Ma (Art. 186)
$$X = \frac{d^2 x}{dt^2} - R\lambda, \text{ etc.}$$

Quindi
$$v \delta v = \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) - R (\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z).$$

Ora se l'elemento rimane sulla superficie di cui l'equazione è $F = 0$,
$$\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z = k \delta F = 0,$$

e se la lascia $R=0$, sicchè in ogni caso l'ultimo termine a dritta svanisce.

Ancora
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

che dà
$$ds\, \delta ds = dx\, \delta dx + dy\, \delta dy + dz\, \delta dz,$$

o
$$v \delta ds = \frac{dx}{dt} \delta dx + \frac{dy}{dt} \delta dy + \frac{dz}{dt} \delta dz$$
$$= \frac{dx}{dt} d \delta x + \frac{dy}{dt} d \delta y + \frac{dz}{dt} d \delta z,$$

poichè l'ordine di d e δ è indifferente.

Quindi

$$\delta A = \delta \int v ds = \int \left\{ \frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z \right.$$
$$\left. + \delta x \, d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \delta y \, d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \delta z \, d\left(\frac{dz}{dt}\right) \right\}$$
$$= \left[\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right],$$

preso tra i proprii limiti. Ora nei due limiti

$$\delta x = 0\,, \quad \delta y = 0\,, \quad \delta z = 0\,;$$

quindi abbiamo

$$\delta A = 0.$$

242. Si dice comunemente che siccome, in generale, è impossibile di supporre l'azione un massimo, questo risultato mostra che essa è un minimo. La vera interpetrazione dell'espressione, $\delta A = 0$, si è che la traiettoria libera dell'elemento è tale, che una piccola deviazione da essa produrrà un cambiamento infinitamente più piccolo nel valore di A. Quindi Hamilton ha suggerito la denominazione più appropriata di *Azione Stazionaria.*

243. Se nessuna forza agisce sull'elemento eccetto la resistenza della superficie, abbiamo v costante, e l'equazione precedente mostra che in questo caso la lunghezza della traiettoria è generalmente un minimo.

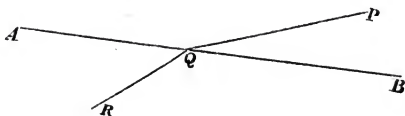
Un elemento perciò, proiettato secondo una superficie levigata e non soggetto ad alcuna forza, traccerà tra due punti qualunque nella sua traiettoria la linea più corta sulla superficie (Art. 191).

Può accadere, nel caso di una sfera per esempio, che l'elemento non traccerà la linea più corta sulla superficie tra i due punti; ma non possiamo entrare qui nei dettagli che sono necessarii per la completa dilucidazione di tali casi.

244. Possiamo applicare questo principio direttamente a formare le equazioni del moto in ogni caso particolare, o a trovare la traiettoria attuale sotto l'azione di forze qualunque.

Es. I. *Prendiamo il caso della rifrazione della luce nella teoria corpuscolare.*

La velocità nel mezzo superiore si suppone essere u, quella nell'inferiore v.

In questo caso l'espressione per l'azione diviene semplicemente

$$uPQ + vQR\,,$$

se PQR è la traiettoria dell'elemento.

Facendo questa quantità un minimo, come dipendente dalla posizione di Q, P ed R essendo punti dati; è facile di mostrare che Q deve giacere nel piano per P ed R perpendicolare alla superficie AB, ed inoltre che i seni delle inclinazioni di PQ e QR alla normale in Q debbono essere nella ragione inversa delle velocità.

245. Es. II. *Trovare l'equazione della traiettoria descritta da un elemento intorno ad un centro di forza.*

Sia P la forza centrale alla distanza r, allora

$$v^2 = C - 2\int P dr, \text{ (Art. 129)}$$

$$= \{\varphi(r)\}^2, \qquad \text{supponiamo , ... (1).}$$

che dà
$$\int v ds = \int \varphi(r)\, ds.$$

Quindi $0 = \delta \int \varphi(r)\, ds$

$$= \int \left\{ \varphi'(r)\, \delta r\, ds + \varphi(r)\, d\,\delta s \right\}$$

$$= \int \left\{ \frac{\varphi'(r)}{r} (x\delta x + y\delta y + z\delta z)\, ds + \varphi(r) \left(\frac{dx}{ds} d\,\delta x + \frac{dy}{ds} d\,\delta y + \frac{dz}{ds} d\,\delta z \right) \right\}$$

$$= \left[\varphi(r) \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} dy + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]$$

$$+ \int \left[\frac{\varphi'(r)}{r} (x\delta x + y\delta y + z\delta z)\, ds - \delta x\, d\left\{ \varphi(r) \frac{dx}{ds} \right\} - \delta y\, d\left\{ \varphi(r) \frac{dy}{ds} \right\} - \delta z\, d\left\{ \varphi(r) \frac{dz}{ds} \right\} \right].$$

La parte integrata si riferisce solamente ai limiti, e quindi deve svanire indipendentemente dall'integrale. Affinchè l'integrale sia identicamente zero, dobbiamo avere

$$\frac{x\varphi'(r)}{r} - \frac{d}{ds}\left\{\varphi(r)\frac{dx}{ds}\right\} = 0 ,$$

con simili equazioni in y e z. Queste si possono scrivere

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(r)\left(\frac{x}{r} - \frac{dr}{ds}\frac{dx}{ds}\right) - \varphi(r)\frac{d^2x}{ds^2} = 0 \\ \varphi'(r)\left(\frac{y}{r} - \frac{dr}{ds}\frac{dy}{ds}\right) - \varphi(r)\frac{d^2y}{ds^2} = 0 \\ \varphi'(r)\left(\frac{z}{r} - \frac{dr}{ds}\frac{dz}{ds}\right) - \varphi(r)\frac{d^2z}{ds^2} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots. (a).$$

Moltiplicando per tre costanti qualunque, A, B, C, ed addizionando, abbiamo

$$\begin{aligned} &(Ax + By + Cz)\frac{\varphi'(r)}{r} \\ &- \left(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} + C\frac{dz}{ds}\right)\varphi'(r)\frac{dr}{ds} \\ &- \left(A\frac{d^2x}{ds^2} + B\frac{d^2y}{ds^2} + C\frac{d^2z}{ds^2}\right)\varphi(r) = 0 ; \end{aligned}$$

che è evidentemente soddisfatta da

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Questa equazione mostra che l'orbita è in un piano che passa per il centro di forza. Sia xy questo piano, allora possiamo limitarci alle prime due delle equazioni (a).

Moltiplicando la seconda per x e la prima per y e sottraendo, otteniamo,

$$\varphi'(r)\frac{dr}{ds}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) + \varphi(r)\left(x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0.$$

Questa è immediatamente integrabile, e dà

$$\varphi(r)\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = \text{costante}.$$

Poichè $\varphi(r)=v$, vediamo per l'Art. 24, che questa è in coordinate polari

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b),$$

che è l'equazione per la descrizione equabile delle aree.

Finalmente, moltiplicando queste due prime equazioni del gruppo (a) per x ed y rispettivamente ed addizionando, abbiamo

$$r\varphi'(r)\left\{1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right\}-\varphi(r)\left(x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}\right)=0 \ ,\ldots (c).$$

Ma, poichè

$$r\frac{dr}{ds}=x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds} \, ,$$

abbiamo con la differenziazione

$$x\frac{d^2x}{ds^2}+y\frac{d^2y}{ds^2}=r\frac{d^2r}{ds^2}+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-1 .$$

Sostituendo in (c), e cambiando la variabile indipendente da s a θ per mezzo dell'equazione

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2 \, ,$$

abbiamo

$$\varphi'(r)\,r\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}-\varphi(r)\left\{r\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r^2\right\}=0 .$$

Ponendo $\frac{1}{u}$ per r, questa diviene

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}\left\{1+\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\} \quad \ldots\ \ldots\ldots (d).$$

Ma, da (b) come si è sviluppato nell'Art. 128,

$$v^2=\{\varphi(r)\}^2=h^2\left\{u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\} .$$

Inoltre $\qquad \varphi(r)\,\varphi'(r)=-P, \quad$ da (1).

Così (d) diviene

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{P}{h^2u^2} \, , \text{ come nell'Art. 121.}$$

246. Avremmo potuto trattare queste equazioni (Art. 245 (a)) alquanto diversamente così

$$\varphi(r) = v = \frac{ds}{dt}.$$

Quindi
$$\varphi(r)\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}, \text{ etc. };$$

ed abbiamo le equazioni

$$\frac{x\varphi'(r)}{r} - \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \text{ , etc. etc. ,}$$

che danno, immediatamente,

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{x} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{y} = \frac{d\left(\frac{dz}{dt}\right)}{z},$$

le quali contengono i teoremi del piano costante e dell'equabile descrizione delle aree; e poichè

$$\varphi'(r)\frac{ds}{dt} = \varphi(r)\,\varphi'(r) = -P,$$

$$-\frac{x}{r}P - \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ , etc. ,}$$

le ordinarie equazioni in tre direzioni rettangolari.

247. Avremmo potuto semplificare il calcolo usando coordinate polari immediatamente dopo di aver dimostrato che l'orbita è piana. Infatti abbiamo

$$A = \int \varphi(r)\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}\, d\theta \text{ , un minimo ,}$$

e quindi (per la formola $V = Pp + C$)

$$\varphi(r)\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}} = \varphi(r)\frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}} + C,$$

o riducendo, e ponendo h per C,

$$r^2\varphi(r) = h\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}} \text{ .... } (e);$$

o
$$r^2 \frac{ds}{dt} = h \frac{ds}{d\theta};$$

quindi
$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h,$$

l'equazione per la descrizione equabile delle aree.

Elevando a quadrato (e) e ponendo mente ad (1), abbiamo

$$\frac{r^4}{h^2}\left(C - 2\int P\,dr\right) = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2,$$

o, ponendo
$$r = \frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{h^2}\left(C + 2\int \frac{P}{u^2}\frac{du}{d\theta}\,d\theta\right) = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2,$$

o, differenziando e dividendo per (2) $\frac{du}{d\theta}$,

$$\frac{P}{h^2 u^2} = u + \frac{d^2 u}{d\theta^2},$$

l'equazione generale delle orbite centrali.

248. Azione Variante. Se, nell'Art. 241, supponiamo

$$\frac{v^2}{2} = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + H = H - V,$$

(con la notazione dell'Art. 72) è evidente che H dipenderà dalla velocità iniziale. Supponendo che questa e le coordinate iniziali e finali variino; allora, in aggiunta alla variazione già considerata della forma della traiettoria tra le sue estremità, dalla quale dipende la parte non integrata del valore di δA, avremo in δA termini che dipendono dalle variazioni delle posizioni iniziale e finale e della velocità iniziale.

Il termine addizionale in $v\delta v$ è δH, ed il suo integrale $t\delta H$ si ottiene immediatamente. Quindi in questa variazione più generale delle condizioni abbiamo nel valore di δA i seguenti termini addizionali, dipendenti solamente dai limiti, e perciò da trattarsi da se,

$$\delta A = \left[\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right] - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 \delta z_0\right] + t\delta H.$$

Quindi, se A si potesse trovare in termini di x, y, z, x_0, y_0, z_0 ed H, avremmo immediatamente i primi od i secondi integrali delle equazioni del moto nella forma

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta A}{\delta x} = \dfrac{dx}{dt}, \quad \dfrac{\delta A}{\delta x_0} = -\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0, \\ \quad\quad \text{etc.} \quad\quad\quad \text{etc.} \\ \text{con l'ulteriore condizione} \\ \quad\quad\quad \dfrac{\delta A}{\delta H} = t. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

249. A è, naturalmente, una funzione di x, y, z, x_0, y_0, z_0 ed H, e vediamo dalle equazioni (1) che essa deve soddisfare le equazioni differenziali parziali

$$\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dz}\right)^2 = v^2 = 2(H - V) \;\ldots\; (1),$$

e
$$\left(\frac{dA}{dx_0}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dy_0}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dz_0}\right)^2 = 2(H - V_0) \;\ldots\ldots\; (2).$$

250. Tutte le circostanze del moto dipendono così dalla funzione A, chiamata da Hamilton la *Funzione Caratteristica*. Ciò che si è detto sopra è un breve schizzo del fondamento della sua teoria dell'*Azione Variante*, per quanto si riferisce al movimento di un solo elemento libero. La determinazione della funzione A è incomoda, anche in casi molto semplici di movimento; ma il fatto che un tal modo di rappresentazione è possibile è estremamente rimarchevole.

251. Più generalmente, omettendo ogni relazione al punto iniziale, ed all'equazione (2) Art. 249 che si riferisce ad esso, consideriamo A semplicemente come una funzione di x, y, z. Allora

Ogni funzione, A, *che soddisfa a*

$$\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dz}\right)^2 = v^2 = 2(H - V)$$

possiede la proprietà che

$$\frac{dA}{dx}, \quad \frac{dA}{dy}, \quad \frac{dA}{dz}$$

rappresentano le componenti rettangolari della velocità di un elemento in un moto possibile sotto l'azione delle forze il di cui potenziale è V.

Infatti, con la differenziazione parziale di (1), abbiamo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X = -\frac{dV}{dx} = \frac{dA}{dx}\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{dA}{dy}\frac{d^2A}{dx\,dy} + \frac{dA}{dz}\frac{d^2A}{dx\,dz}.$$

Ma
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dx}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2A}{dx\,dy} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2A}{dx\,dz}.$$

Paragonando, vediamo che

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dA}{dy}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dA}{dz},$$

soddisfano questa e le altre due simili coppie di equazioni.

252. Inoltre, se α, β sono costanti, che, con H, sono contenute in un integrale completo della precedente equazione differenziale parziale, *la traiettoria corrispondente, ed il tempo della sua descrizione, sono dati da*

$$\frac{dA}{d\alpha} = \alpha_1, \quad \frac{dA}{d\beta} = \beta_1, \quad \frac{dA}{dH} = t + H_1,$$

dove α_1, β_1, H_1 *sono tre costanti addizionali.*

Infatti queste equazioni danno, con la differenziazione,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2A}{dx\,d\alpha}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2A}{dy\,d\alpha}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2A}{dz\,d\alpha}\frac{dz}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2A}{dx\,d\beta}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2A}{dy\,d\beta}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2A}{dz\,d\beta}\frac{dz}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2A}{dx\,dH}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2A}{dy\,dH}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2A}{dz\,dH}\frac{dz}{dt} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (a).$$

Ma, differenziando (1), otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2A}{d\alpha\,dx}\frac{dA}{dx} + \frac{d^2A}{d\alpha\,dy}\frac{dA}{dy} + \frac{d^2A}{d\alpha\,dz}\frac{dA}{dz} &= 0 \\ \frac{d^2A}{d\beta\,dx}\frac{dA}{dx} + \frac{d^2A}{d\beta\,dy}\frac{dA}{dy} + \frac{d^2A}{d\beta\,dz}\frac{dA}{dz} &= 0 \\ \frac{d^2A}{dH\,dx}\frac{dA}{dx} + \frac{d^2A}{dH\,dy}\frac{dA}{dy} + \frac{d^2A}{dH\,dz}\frac{dA}{dz} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (b).$$

I valori di $\frac{dx}{dt}$, etc. in (a) sono evidentemente eguali rispettivamente a quelli di $\frac{dA}{dx}$, etc. in (b). Quindi la proposizione.

253. *Superficie di eguale azione*, cioè quelle di cui l'equazione comune è

$$A = \text{cost.} = C\,,$$

sono incontrate ad angoli retti dalle traiettorie.

Infatti i coseni di direzione della normale sono evidentemente proporzionali a $\frac{dA}{dx}$, $\frac{dA}{dy}$, $\frac{dA}{dz}$ cioè a $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Così la determinazione delle superficie di eguale azione si risolve nel problema di trovare le traiettorie ortogonali di un sistema di date curve nello spazio, quando le condizioni del movimento sono date. Non possiamo, in questa opera, entrare in moltò dettaglio su questo soggetto molto curioso, e quindi diamo solamente un'altra singolare proprietà di queste superficie prima di applicare il principio dell'Azione Variante ad un problema importante.

Sia ϖ la distanza normale in un punto qualunque tra le superficie consecutive

$$A = C\,, \quad \text{ed} \quad A = C + \delta C.$$

Abbiamo evidentemente

$$\frac{dA}{dx}\delta x + \frac{dA}{dy}\delta y + \frac{dA}{dz}\delta z = \delta C\,,$$

o

$$\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z = \delta C\,,$$

dove δx, δy, δz sono le coordinate relative di due punti contigui qualunque sulle due superficie. Se ρ è la lunghezza della linea che congiunge questi punti, θ la sua inclinazione alla normale (cioè la linea del movimento), questa evidentemente si può scrivere

$$v\rho\cos\theta = v\varpi = \delta C\,,$$

poichè $\rho\cos\theta$ è la distanza normale tra le superficie.

Così, *la distanza tra le superficie consecutive di eguale azione è, in ogni punto, inversamente come la velocità nella traiettoria corrispondente.*

Questo si può vedere immediatamente come segue; l'elemento dell'azione è $v\delta s$ (dove δs, essendo un elemento della traiettoria, è la distanza normale tra le superficie) e deve perciò essere eguale a δC.

254. *Dedurre, dal principio dell'Azione Variante, la forma ed il modo di descrizione dell'orbita di un pianeta.*

In questo caso è chiaro che $-\frac{dV}{dr}$ rappresenta la forza di gravità $\left(-\frac{\mu}{r^2}\right)$. Quindi il secondo membro di (1) Art. 249 si può scrivere $2\left(H+\frac{\mu}{r}\right)$.

Prendiamo il piano delle xy come quello dell'orbita, allora l'equazione (1) Art. 249 diviene

$$v^2 = \left(\frac{dA}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dy}\right)^2 = 2\left(H+\frac{\mu}{r}\right) \text{.........} (1).$$

Non è difficile di ottenere una soluzione soddisfacente di questa equazione; ma l'operazione si semplifica molto con l'uso delle coordinate polari. Con questo cambiamento, (1) diviene

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dA}{d\theta}\right)^2 = 2\left(H+\frac{\mu}{r}\right) \text{..........} (2),$$

che è evidentemente soddisfatta da

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA}{d\theta} &= \text{costante} = \alpha \\ \left(\frac{dA}{dr}\right)^2 &= 2\left(H+\frac{\mu}{r}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2} \end{aligned}\right\} \text{.............} (3).$$

Quindi

$$A = \alpha\theta + \int dr \sqrt{2\left(H+\frac{\mu}{r}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}} \text{.........} (4).$$

Gl'integrali finali sono perciò, per l'Art. 252,

$$\frac{dA}{d\alpha} = \mathbf{A} = \theta - \alpha \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2\left(H+\frac{\mu}{r}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} \text{......} (5),$$

e
$$\frac{dA}{dH} = t + \varepsilon = \int \frac{dr}{\sqrt{2\left(H + \frac{\mu}{r}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} \quad \text{.........} \quad (6).$$

Queste equazioni contengono la soluzione completa del problema, poichè esse contengono quattro costanti, A, α, H, ε. (5) dà l'equazione dell'orbita, e (6) il tempo in termini del raggio vettore.

255. Per completare la soluzione, poniamo

$$\frac{\mu}{\alpha^2} = \frac{1}{l},$$

$$\frac{2H}{\alpha^2} = \frac{e^2 - 1}{l^2},$$

dove l ed e sono due nuove costanti arbitrarie introdotte in luogo di α ed H. Con queste (5) diviene

$$A = \theta - \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{e^2-1}{l^2} + \frac{2}{lr} - \frac{1}{r^2}}}$$

$$= \theta - \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{e^2}{l^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right)^2}}$$

$$= \theta - \cos^{-1} \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{l}}{\frac{e}{l}},$$

o
$$r = \frac{l}{1 + e \cos(\theta - A)},$$

l'equazione polare generale delle sezioni coniche riferite al fuoco.

Inoltre, differenziando (5) rispetto ad r, abbiamo

$$\frac{\alpha dr}{r^2 \sqrt{2\left(H + \frac{\mu}{r}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} = d\theta,$$

dalla quale, per (6), otteniamo immediatamente

$$t + \varepsilon = \frac{1}{\alpha}\int r^2 d\theta = \frac{1}{\sqrt{\mu l}}\int r^2 d\theta.$$

Questo contiene, di nuovo, l'equazione della descrizione equabile delle aree.

256. Per illustrare il soggetto ulteriormente, dedurremo da queste formole altri degli ordinarii risultati dei Cap. V. e VI. Così, dinotino θ_0, r_0 le coordinate polari di un punto fisso qualunque nella traiettoria, dal quale si deve contare l'azione. Abbiamo, da (4),

$$A = \alpha(\theta - \theta_0) + \int_{r_0}^{r} dr \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + H\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{2\left(\frac{\mu}{r} + H\right) dr}{\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + H\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} \quad \text{.................. (7)},$$

poichè, da (5),

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\alpha dr}{r^2\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + H\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}}.$$

Per integrare (7), si osservi che (Art. 135) $\frac{v^2}{2} < \frac{\mu}{r}$ in un'orbita ellittica, e che così H è negativa da (1) Art. 254.

Si ponga

$$\frac{\mu}{H} = -2a,$$

$$\frac{\alpha^2}{\mu a} = 1 - e^2,$$

ed

$$r = a(1 - e\cos\varphi)$$

e (7) diviene, dopo la sostituzione,

$$A = \sqrt{\mu a}\int_{\varphi_0}^{\varphi} (1 + e\cos\varphi)\, d\varphi,$$

che è immediatamente integrabile.

È chiaro per l'Art. 148 che φ rappresenta l'anomalia eccentrica. Se la misuriamo dal perielio abbiamo evidentemente

$$A = \sqrt{\mu a}(\varphi + e \operatorname{sen} \varphi).$$

257. Da (6) abbiamo

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + H\right) - \frac{a^2}{r^2}}}.$$

Impiegando le stesse sostituzioni come nell'ultimo articolo, φ essendo misurato dal perielio, è facile di porre questa espressione nella forma

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \int_0^{\varphi} (1 - e \cos \varphi)\, d\varphi$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[\varphi - e \operatorname{sen} \varphi\right],$$

la formola degli Art. 147, 149.

258. Dal procedimento dell'Art. 147 vediamo che mentre

$$\varphi - e \operatorname{sen} \varphi$$

è proporzionale all'area descritta intorno al centro di forza, e perciò proporzionale al tempo;

$$\varphi + e \operatorname{sen} \varphi$$

è proporzionale all'area descritta intorno all'altro fuoco, ed è, per l'Art. 256, proporzionale all'azione. Così nell'orbita ellittica di un pianeta *il tempo è misurato dall'area descritta intorno ad un fuoco, e l'azione da quella intorno all'altro.*

Una facile verificazione di questo risultato curioso è come segue. Con la solita notazione abbiamo

$$dA = v\,ds$$

$$= \frac{h}{p}\, ds,$$

pel risultato dell'Art. 126. Ma nell'ellisse o iperbole, p' essendo la perpendicolare dal secondo fuoco,

$$pp' = \pm b^2.$$

Quindi $$dA = \pm \frac{h}{b^2} p' ds,$$

che esprime il risultato cercato.

È facile di estendere questo ad un'orbita parabolica, per la quale, in verità, il teorema è anche più semplice.

259. Può essere utile di dare un altro esempio del rimarchevole metodo di Hamilton. Per questo scopo considereremo di nuovo brevemente le *Spirali di Cotes*. [Si vegga Cap. V. Es. 15]

Qui la forza centrale è inversamente come il cubo della distanza, e perciò l'equazione dell'azione è

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dA}{d\theta}\right)^2 = 2\left(H + \frac{\mu}{r^2}\right).$$

Quindi, come nell'Art. 254, abbiamo

$$\frac{dA}{d\theta} = \alpha,$$

$$\frac{dA}{dr} = \sqrt{2H + \frac{2\mu - \alpha^2}{r^2}}.$$

Da queste è facile di trovare A, ma lasciamo ciò come un esercizio allo studente.

Ancora, $$\mathbf{A} = \frac{dA}{d\alpha} = \theta - \alpha \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2H + \frac{2\mu - \alpha^2}{r^2}}}$$

$$= \theta + \frac{\alpha}{\sqrt{2\mu - \alpha^2}} \log\left\{\frac{\sqrt{2\mu - \alpha^2}}{r} + \sqrt{2H + \frac{2\mu - \alpha^2}{r^2}}\right\}.$$

Sostituendo gli esponenziali per il logaritmo, questa prende la forma

$$\frac{\sqrt{2\mu - \alpha^2}}{r} = e^{\frac{\sqrt{2\mu - \alpha^2}}{\alpha}(\theta - \mathbf{A})} - 2He^{-\frac{\sqrt{2\mu - \alpha^2}}{\alpha}(\theta - \mathbf{A})}.$$

Questa integrazione è in difetto per alcuni valori speciali delle costanti, o per alcune relazioni tra esse, ma il lettore non può avere alcuna difficoltà nell'ottenere i richiesti cambiamenti in questi casi, e così riprodurre tutte le varietà delle possibili orbite corrispondenti agli Esempii del Cap. V.

260. Se trattiamo l'investigazione dell'Art. 186, nel modo nel quale Hamilton trattò quella dell'Art. 240, giungiamo a diversi teoremi curiosi relativi alle Brachistocrone; del che qualche cosa si darà qui tratta dalle *Trans. R. S. E.* 1865.

Ponendo τ per il tempo nella Brachistocrona, abbiamo

$$\frac{\delta\tau}{\delta x}=\frac{1}{v^2}\frac{dx}{dt},\ \frac{\delta\tau}{\delta x_0}=-\left(\frac{1}{v^2}\frac{dx}{dt}\right)_0$$

. . . .

$$\frac{\delta\tau}{\delta H}=-\int\frac{dt}{v^2}=-\int\frac{ds}{v^3},$$

corrispondente al gruppo nell'Art. 248.

Quindi, appunto come nell'Art. 251 si può mostrare che per delle forze qualunque, di cui V è il potenziale, un valore di τ dall'equazione

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{dz}\right)^2=\frac{1}{v^2}=\frac{1}{2(H-V)},$$

è tale che i suoi coefficienti differenziali parziali rappresentano le componenti della velocità in una possibile brachistocrona, ciascuna divisa per il quadrato dell'intera velocità.

Inoltre se τ contiene, oltre di H, due costanti arbitrarie α, β, le equazioni della brachistocrona sono

$$\frac{d\tau}{d\alpha}=\mathbf{A},$$

$$\frac{d\tau}{d\beta}=\mathbf{B}.$$

261. *Trovare la Brachistocrona quando la forza è centrale, e proporzionale ad una potenza della distanza; la velocità essendo inoltre proporzionale ad una potenza della distanza, cioè, essendo la velocità dall'infinito se la forza è attrattiva, dal centro se è ripulsiva.*

Qui $$v^2=2(H-V)=\frac{\mu}{r^n},$$

e la forza centrale alla distanza r è evidentemente

$$-\frac{dV}{dr}=-\frac{n\mu}{2r^{n+1}}.$$

Così (2) diviene

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{dz}\right)^2=\frac{r^n}{\mu},$$

o, passando alle coordinate polari,

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2=\frac{r^n}{\mu}.$$

È chiaro che dobbiamo prendere

$$\frac{d\tau}{d\varphi}=0,$$

il che mostra che la traiettoria è in un piano che passa pel centro di forza. L'equazione precedente sarà allora soddisfatta da

$$\frac{d\tau}{d\theta}=a,\qquad \frac{d\tau}{dr}=\sqrt{\frac{r^n}{\mu}-\frac{a^2}{r^2}}.$$

Quindi abbiamo

$$\tau=a\theta+\int dr\sqrt{\frac{r^n}{\mu}-\frac{a^2}{r^2}}$$

$$=a\theta+\frac{2a}{n+2}\left\{\sqrt{\frac{r^{n+2}}{\mu a^2}-1}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{\mu}\,a}{r^{\frac{n+2}{2}}}\right\}+C.$$

E l'equazione della brachistocrona, che è evidentemente una curva piana, è

$$0=0+\frac{2}{n+2}\left\{\sqrt{\frac{r^{n+2}}{\mu a^2}-1}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{\mu}\,a}{r^{\frac{n+2}{2}}}\right\}$$

$$+\frac{2a}{n+2}\left\{-\frac{\frac{r^{n+2}}{\mu a^3}}{\sqrt{\frac{r^{n+2}}{\mu a^2}-1}}+\frac{\sqrt{\mu}}{r^{\frac{n+2}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mu a^2}{r^{n+2}}}}\right\}$$

$$=0-\frac{2}{n+2}\cos^{-1}\frac{\sqrt{\mu}\,a}{r^{\frac{n+2}{2}}}:$$

o
$$r^{\frac{n+2}{2}} = \sqrt{\mu}\, a \sec\frac{n+2}{2}(\theta - \mathbf{A}),$$

mentre l'equazione della traiettoria *libera* è

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \cos\frac{n-2}{2}(\theta + \beta).$$

L'integrazione precedente è in difetto nel caso di $n=-2$; cioè, quando la forza è ripulsiva e direttamente come la distanza, la velocità svanendo al centro di forza. Ma in questo caso

$$\tau = a\theta + \sqrt{\frac{1}{\mu} - a^2}\,\log Cr,$$

e l' equazione della brachistocrona è

$$\mathbf{A} = \theta - \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{\mu} - a^2}}\log Cr,$$

la spirale logaritmica. Eliminando r tra queste equazioni, vediamo che il tempo è proporzionale all'angolo polare.

Poichè è stata assegnata una forma definita all'espressione della velocità in questo problema, è chiaro che H è dato, e perciò che non vi è $\frac{d\tau}{dH}$.

La supposizione

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = 0$$

è facilmente giustificata, nel caso di un'equazione qualunque della forma

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = F^2,$$

se F è una funzione della sola r. Infatti

$$\delta\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right) = \frac{d^2\tau}{dr\,d\varphi}\delta r + \frac{d^2\tau}{d\theta\,d\varphi}\delta\theta + \frac{d^2\tau}{d\varphi^2}\delta\varphi.$$

Ma

$$\frac{d\tau}{dr} = F^2\frac{dr}{dt},\ \frac{d\tau}{rd\theta} = F^2\frac{rd\theta}{dt},\ \frac{d\tau}{r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi} = F^2\frac{r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi}{dt}.$$

Quindi

$$\delta\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)=\frac{\delta t}{F^2}\left\{\frac{d\tau}{dr}\frac{d^2\tau}{dr\,d\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{d\tau}{d\theta}\frac{d^2\tau}{d\theta\,d\varphi}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d\tau}{d\varphi}\frac{d^2\tau}{d\varphi^2}\right\}-\frac{\delta t}{F}\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)=0.$$

Cioè, a meno che F non contenga φ, $\frac{d\tau}{d\varphi}$ è necessariamente una costante, β supponiamo.

Ma, nel presente caso, *se diamo a questa costante un valore qualunque diverso da zero, introduciamo un problema molto più generale di quello proposto,* poichè l'espressione per il reciproco del quadrato della velocità diviene

$$\frac{r^n}{\mu}-\frac{r^2\operatorname{sen}^2\theta}{\beta^2}.$$

262. Si vede facilmente che

$$\tau=C$$

è l'equazione di una superficie *Isocrona.*

Inoltre, poichè

$$\frac{\left(\frac{d\tau}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{d\tau}{dy}\right)}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\left(\frac{d\tau}{dz}\right)}{\frac{dz}{dt}}$$

la brachistocrona taglia tutte queste superficie ad angoli retti.

E la distanza normale tra due superficie isocrone consecutive è proporzionale alla velocità nella brachistocrona di cui essa forma un elemento. Poichè, come è chiaro,

$$\delta s=v\delta\tau.$$

263. L'equazione di Hamilton per la determinazione della Funzione Caratteristica (A) nel caso del moto libero di un solo elemento è

$$\left(\frac{dA}{dx}\right)^2+\left(\frac{dA}{dy}\right)^2+\left(\frac{dA}{dz}\right)^2=2\,(H-V).$$

Il paragone di questa con l'equazione dell'Art. 260 suggerisce un'utile trasformazione. Introducendo in quella equazione un

fattore θ^2, una funzione indeterminata di x, y, z, abbiamo

$$\left(\theta\frac{d\tau}{dx}\right)^2+\left(\theta\frac{d\tau}{dy}\right)^2+\left(\theta\frac{d\tau}{dz}\right)^2=\frac{\theta^2}{2\,(H-V)}\,.$$

Se facciamo

$$\theta=\varphi'(\tau)$$

e
$$\frac{\theta^2}{2\,(H-V)}=2\,(H_1-V_1),$$

essa diviene

$$\left(\frac{d\varphi(\tau)}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi(\tau)}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi(\tau)}{dz}\right)^2=2(H_1-V_1).$$

Qui è chiaro, che $\varphi(\tau)$ è l'azione in una traiettoria *libera* coincidente con la brachistocrona, e che $2\,(H_1-V_1)$ è il quadrato della velocità in questa traiettoria.

Quindi il risultato curioso che, *se τ è il tempo per un arco qualunque di una data brachistocrona, la stessa traiettoria sarà descritta liberamente sotto l'azione di forze il di cui potenziale è* V_1, *dove*

$$2\,(H_1-V_1)=\frac{\{\varphi'(\tau)\}^2}{2\,(H-V)}\,,$$

φ' essendo una funzione qualunque, e $\varphi(\tau)$ rappresenterà l'azione nella traiettoria libera.

264. La più semplice supposizione che possiamo fare si è che $\varphi'(\tau)$ sia costante. In questo caso la velocità nella traiettoria libera è inversamente proporzionale a quella nella brachistocrona nello stesso punto; e l'azione nell'una è proporzionale al tempo nell'altra. In fatti, come il Sig. W. Thomson ha indicato, in questo caso l'investigazione si può fare con estrema semplicità, così.

Nella brachistocrona abbiamo

$$\int\frac{ds}{v}\ \text{un minimo.}$$

Ponendo $\mathrm{v}=\frac{1}{v}$, e considerando v come la velocità nella stessa traiettoria dovuta ad un altro potenziale (facilmente determinabile); dobbiamo avere

$$\int\mathrm{v}\,ds\ \text{un minimo.}$$

Questa è l'ordinaria condizione della *Minima azione*, ed appartiene perciò, ad una traiettoria libera.

Quindi, poichè la cicloide è la brachistocrona per la gravità, e poichè in essa $v^2 = 2gy$, essa sarà una traiettoria libera se $v^2 = \frac{1}{2gy}$, cioè per un sistema di forze in cui il potenziale si trova da

$$H_1 - V_1 = \frac{1}{4gy} .$$

Questo dà

$$-\frac{dV_1}{dx} = 0 ; \quad -\frac{dV_1}{dy} = -\frac{1}{4gy^2}.$$

In altre parole, una cicloide si può descrivere liberamente sotto l'azione di una forza verso la base, ed inversamente come il quadrato della distanza da essa; e la velocità in un punto qualunque sarà reciproca di quella nella stessa cicloide quando essa è la comune brachistocrona.

Questo risultato si verifica facilmente con un procedimento diretto.

265. L'inversa della proposizione nell'Art. 263 è anche curiosa. Prendendo l'equazione di Hamilton Art. 251, abbiamo,

$$\{\varphi'(A)\}^2 \left\{\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dA}{dz}\right)^2\right\} = 2(H - V)\{\varphi'(A)\}^2$$

Paragonando questa con quella dell'Art. 260, vediamo che $\tau = \varphi(A)$ è l'espressione brachistocronica per il tempo in una traiettoria che è una traiettoria libera per il potenziale V, purchè $\varphi(A)$ ed il potenziale per la brachistocrona siano legati dall'equazione

$$\frac{1}{2(H_1 - V_1)} = 2(H - V)\{\varphi'(A)\}^2.$$

Quindi, *se* A *è l'azione in una data traiettoria libera, la stessa traiettoria sarà una brachistocrona per le forze di cui il potenziale è* V_1, *determinato dalla condizione or ora data,* V *essendo il potenziale nella traiettoria libera.*

Così, la parabola

$$(x - A)^2 = 4a(y - a)$$

è la traiettoria libera per $v^2 = 2gy$. E l'azione è data da

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} A = x\sqrt{a} + \frac{2}{3}(y - a)^{\frac{3}{2}}.$$

Quindi questa parabola è la brachistocrona per

$$2(H_1 - V_1) = \frac{1}{2gy\{\varphi'(A)\}^2}.$$

Nel caso più semplice $\varphi'(A)=1$, ed abbiamo

$$-\frac{dV_1}{dx} = 0, \qquad -\frac{dV_1}{dy} = -\frac{1}{4gy^2}.$$

Quindi, per l'Art. 264, la parabola è una brachistocrona quando una cicloide è la traiettoria libera.

266. Gli esempii immediatamente precedenti sono casi particolari del teorema generale seguente, il quale si vede facilmente che è contenuto nei risultati degli Art. 263, 265. *Se abbiamo due curve,* P *e* Q, *di cui* P *è una traiettoria libera, e* Q *una brachistocrona, per un dato sistema conservativo di forze;* P *sarà una brachistocrona per un sistema di forze per le quali* Q *è una traiettoria libera; e l'azione ed il tempo in un arco qualunque di ciascuna, quando essa è descritta liberamente, sono funzioni del tempo e dell'azione rispettivamente, nello stesso arco, quando essa è una brachistocrona.*

267. Quando un elemento si muove in una curva qualunque, si è mostrato (Art. 17, 19), che l'accelerazione secondo il raggio di curvatura assoluta della traiettoria è $\frac{v^2}{\rho}$; cioè, si richiede una forza $\frac{mv^2}{\rho}$ per deviare l'elemento dalla tangente, che è la linea che esso tende a prendere in virtù della sua inerzia.

Da questo, o dalla formola nell'Art. 129, vediamo che se un elemento gira alla distanza r, con velocità angolare ω, intorno ad un punto, una forza $mr\omega^2$ diretta verso quel punto si richiede per mantenere la distanza r inalterata. La tendenza a muoversi nella tangente si supponeva prima essere una tendenza ad allontanarsi *direttamente dal* centro intorno al quale l'elemento gira, e questa s'immaginava dovuta ad una forza, chiamata *Forza Centrifuga*, generata nell'elemento dalla sua rotazione intorno al centro.

Abbiamo veduto che quando il moto di un elemento in una traiettoria qualunque si riferisce a coordinate polari in un piano, l'accelerazione secondo il raggio vettore è (Art. 16)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Ora la velocità secondo r è $\frac{dr}{dt}$, e quella perpendicolare ad esso è $r\frac{d\theta}{dt}$; quindi il primo termine della suddetta formola è l'accelerazione della velocità secondo il raggio vettore, e l'altro è la così detta forza centrifuga dovuta ad una velocità $r\frac{d\theta}{dt}$ in un circolo di raggio r. Il nome *Forza Centrifuga* è assurdo e trae in inganno, ma l'idea di questa forza così chiamata è utile, come abbiamo già veduto (Art. 209), nell'abilitarci a formare prontamente le equazioni del moto di un elemento nei casi particolari.

268. *Data la traiettoria di un elemento, ed il modo della sua descrizione trovare le forze necessarie.*

Se X, Y, Z sono le forze richieste per l'unità di massa, dobbiamo avere

$$X=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$
$$=\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds}\right)=v\frac{d}{ds}\left(v\frac{dx}{ds}\right),$$

con simili espressioni per Y e Z. Ma siccome è data la traiettoria, ed il modo della sua descrizione, cioè v in termini delle coordinate, il valore delle espressioni precedenti è completamente conosciuto.

In vece di avere la velocità in ogni punto, potremmo avere altre condizioni, come per esempio che la forza risultante debba essere in una data direzione, etc., ma queste, come la precedente non presentano difficoltà.

269. *Un elemento si muove in un piano, sotto l'azione di una forza centrale diretta ad un punto che si muove in una data maniera nel piano: trovare il moto.*

Siano x, y, ξ, η le coordinate dell'elemento e del punto al tempo t. ξ ed η sono funzioni date di t. Inoltre sia $P=f(r)$ la forza centrale alla distanza r. Allora

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-P\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-P\frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (1),$$

sono le equazioni del moto.

Le equazioni del moto *relativo* sono, come è chiaro,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2(x-\xi)}{dt^2} &= -P\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-\frac{d^2\xi}{dt^2}\\ \frac{d^2(y-\eta)}{dt^2} &= -P\frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-\frac{d^2\eta}{dt^2}\end{aligned}\right\}\ldots(2),$$

o, ponendo ξ_1, η_1, per le coordinate relative,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= -P\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}-\frac{d^2\xi}{dt^2}\\ \frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= -P\frac{\eta_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}-\frac{d^2\eta}{dt^2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Queste equazioni illustrano, in un caso particolare, il teorema generale dell' Art. 26; siccome esse contengono, in aggiunta ai termini dovuti all' attrazione del centro fisso, le due note quantità $-\frac{d^2\xi}{dt^2}$ e $-\frac{d^2\eta}{dt^2}$, le componenti dell' accelerazione del centro *rivolte in senso contrario*.

270. Es. *La forza centrale varii direttamente come la distanza.*

Qui $P=\mu\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}$, e le equazioni (3) dell' ultimo articolo diventano

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= -\mu\xi_1-\frac{d^2\xi}{dt^2}\\ \frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= -\mu\eta_1-\frac{d^2\eta}{dt^2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

le quali s' integrano facilmente, nella forma

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\sqrt{\mu}t+B)-\frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d}{dt}\right)^2+\mu}\xi\\ \eta_1 &= C\cos(\sqrt{\mu}t+D)-\frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d}{dt}\right)^2+\mu}\eta\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(5);$$

per valori particolari di ξ ed η in termini di t.

Curiosamente abbastanza, queste equazioni mostrano che la forma e la posizione dell'orbita relativa si alterano semplicemente cambiando il suo centro, che non è più al centro di forza.

Come un caso particolare, supponiamo che il centro di forza si muova con uniforme accelerazione, α, parallela ad una data direzione, che si può prendere per asse delle y. Il centro di forza descriverà in generale una parabola (Cap. IV.), ed il moto relativo dell'elemento sarà lo stesso come nell'Art. 119, il centro dell'ellisse o dell'iperbole non essendo al centro di forza ma ad una distanza $\frac{\alpha}{\mu}$ da esso in una linea parallela all'asse delle y.

Ancora, supponiamo che il centro si muova uniformemente in un circolo. Abbiamo

$$\xi = a\cos\omega t, \qquad \eta = a \operatorname{sen}\omega t,$$

e

$$\xi_1 = A\cos(\sqrt{\mu}t + B) - \frac{\omega^2 a}{\omega^2 - \mu}\cos\omega t,$$

$$\eta_1 = C\cos(\sqrt{\mu}t + D) - \frac{\omega^2 a}{\omega^2 - \mu}\operatorname{sen}\omega t,$$

sicchè il movimento è ancora in un'ellisse o un'iperbole, ma il suo centro descrive uniformemente un circolo di raggio $\frac{\omega^2 a}{\omega^2 - \mu}$ intorno al centro di forza.

271. *Se il raggio vettore di una curva nello spazio è ad ogni istante parallelo alla direzione, ed eguale alla grandezza, della velocità di un elemento che si muove in una traiettoria qualunque; la curva si chiama l'odografo corrispondente alla traiettoria* (Art. 20).

L'odografo è evidentemente una curva piana se la traiettoria è tale.

Siano x, y, z le coordinate di un punto nella traiettoria, ξ, η, ζ quelle del punto corrispondente dell'odografo; allora evidentemente per la definizione,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi \\ \frac{dy}{dt} &= \eta \\ \frac{dz}{dt} &= \zeta \end{aligned}\right\}.$$

Quindi, se σ è l'arco dell'odografo,

$$\frac{d\sigma}{dt}=\sqrt{\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right\}},$$

ed i coseni di direzione di $d\sigma$ sono proporzionali a

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Quindi vediamo, come nell'Art. 20, che

La tangente all'odografo ad ogni istante è parallela alla forza risultante che agisce sull'elemento nel punto corrispondente della sua traiettoria, e la velocità in esso è eguale all'accelerazione dell'elemento.

Segue da ciò che, se r_1, θ_1 sono le coordinate polari dell'odografo,

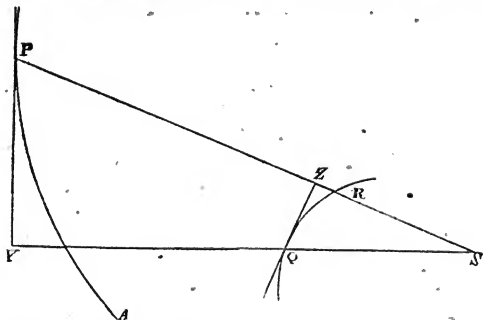
$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=r_1^2\frac{d\theta_1}{dt}=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\psi}{dt}=\frac{v^3}{\rho},$$

una dimostrazione del teorema geometrico assunto nell'Art. 164.

272. Il caso più importante dell'odografo essendo quello che corrisponde ad un'orbita intorno ad un solo centro di forza, possiamo dedurre le proprietà precedenti per quel caso in un modo alquanto diverso.

Sia P un punto qualunque in PA, un arco di un'orbita de-

scritta intorno ad un centro di forza S. Si tiri SY perpendicolare alla tangente in P, e si prenda $SQ\cdot SY=h$, allora eviden-

temente SQ è eguale alla velocità in P, e perpendicolare ad essa in direzione. Quindi il luogo di Q è l'odografo girato nel suo proprio piano per 90°.

Ma vediamo che esso è la polare reciproca di PA rispetto ad un circolo il di cui centro è S ed il raggio $=\sqrt{h}$. Quindi, per la geometria, la tangente in Q è perpendicolare ad SP. Questo evidentemente corrisponde alla prima delle due proprietà generali dell' odografo date nell' ultimo articolo.

Rappresentino $r, \theta, p, s, r', \theta', p', s'$ le solite quantità per i punti corrispondenti delle due curve; allora se ρ è il raggio di curvatura in Q, abbiamo dalla condizione che QZ è perpendicolare ad SP,

$$\delta s' = \rho\delta\theta = r'\frac{dr'}{dp'}\delta\theta$$

$$= \frac{h}{p}\frac{d\frac{1}{p}}{d\frac{1}{r}}\delta\theta = \frac{h}{p^3}\frac{dp}{dr}r^2\delta\theta$$

$$= \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}\delta t = P\delta t, \text{ (Art. 125)},$$

il che dimostra la seconda proprietà.

273. *Trovare il modo di descrizione di un dato odografo affinchè esso corrisponda ad un' orbita centrale.*

Qui, $$\rho d\theta = \delta s' = \frac{r'^2\delta\theta'}{p'};$$

perciò $$\rho r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h^2 r'^2}{p'^3}\frac{d\theta'}{dt},$$

o $$h\frac{d\theta'}{dt} = \frac{\rho p'^3}{r'^2} = \frac{\rho r'^4}{\left(\frac{ds'}{d\theta'}\right)^3}$$

$$= \frac{r'^4}{r'^2 + 2\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2 - r'\frac{d^2 r'}{d\theta'^2}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{d^2u'}{d\theta'^2} + u'\right)u'}\left(\text{dove } u' = \frac{1}{r'}\right),$$

$$=\frac{p'^3 u'}{\frac{dp'}{dr'}}$$

$$=p'^3 u'^2 \rho' ,$$

che dà la richiesta velocità angolare in un punto qualunque dell'odografo, in termini delle coordinate di quel punto.

274. Quando la forza centrale è inversamente come il quadrato della distanza, abbiamo dall'Art. 272 per l'arco dell'odografo,

$$\delta s' = \frac{\mu}{r^2}\,\delta t = \frac{\mu}{h}\,\delta\theta ,$$

o

$$\rho = \frac{\mu}{h}.$$

Quindi per tutte le sezioni coniche descritte intorno al fuoco l'odografo è un circolo, come fu mostrato prima da Hamilton.

Questo si potrebbe mostrare in un altro modo, così. Nella figura (Art. 272) se PA è una porzione di un'ellisse o iperbole di cui S è il fuoco, il luogo di Y è il circolo ausiliario. Quindi evidentemente il luogo di Q è un circolo. Se PA è una porzione di una parabola di cui S è il fuoco, il luogo di Y è una linea retta, e quindi quello di Q è un circolo che passa per S.

Quindi generalmente, l'odografo per ogni orbita intorno ad un centro di forza di cui l'intensità è inversamente come il quadrato della distanza, è un circolo; intorno ad un punto interno per un'ellisse, un punto esterno per un'iperbole, ed intorno ad un punto nella circonferenza per una parabola.

Una dimostrazione puramente analitica dello stesso teorema si dà facilmente. Se x, y sono le coordinate del pianeta, ξ, η quelle di un punto nell'odografo, allora

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \qquad \eta = \frac{dy}{dt}.$$

Le equazioni del moto sono

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\mu}{r^2}\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mu y}{r^3} = \frac{\mu}{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Quindi, come al solito,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} = h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

e perciò

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu}{h}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu}{h}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right),$$

che dà, con l'integrazione,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} + A = \xi + A = \frac{\mu y}{hr}. \\ \text{Similmente} \quad &\frac{dy}{dt} + B = \eta + B = -\frac{\mu x}{hr}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

e quindi

$$(\xi + A)^2 + (\eta + B)^2 = \frac{\mu^2}{h^2},$$

che dimostra che l'odografo è un circolo.

Inoltre, eliminando $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ fra le tre equazioni (1), (2), otteniamo per l'equazione dell'orbita

$$-h + Ay - Bx = \frac{\mu}{h}r,$$

che dà immediatamente le proprietà del fuoco e della direttrice.

275. La legge della diffusione del calore e della luce da un corpo calorifico o luminoso è quella del quadrato inverso della distanza. Quindi un arco dell'odografo dell'orbita di un pianeta, il quale arco abbiamo già veduto che rappresenta *l'accelerazione integrale* dovuta alla forza centrale, rappresenta ancora l'intera quantità di luce o di calore derivata dal Sole, durante il passaggio pel corrispondente arco della sua orbita.

Es. *Paragonare le quantità di luce e di calore ricevute lungo le loro orbite dalla Terra che si muova in un circolo, e da una cometa che si muova in una parabola alla stessa distanza periclia.*

Gli odografi sono tutti e due circoli, l'uno intorno al suo centro, l'altro intorno ad un punto nella sua circonferenza; ma il diametro del secondo è $\sqrt{2}$ volte il raggio del primo (Art. 135).

Quindi le loro circonferenze stanno come $\sqrt{2}:1$, o la Terra nella sua orbita riceve in una rivoluzione $\sqrt{2}$ volte la quantità di luce e di calore che la cometa può ricevere nella sua intera traiettoria.

È evidente che la traiettoria apparentemente descritta da una stella fissa, in conseguenza dell'*Aberrazione* della luce, è l'odografo dell'orbita della Terra, ed è perciò un circolo in un piano parallelo all'eclittica, e delle stesse dimensioni per tutte le stelle.

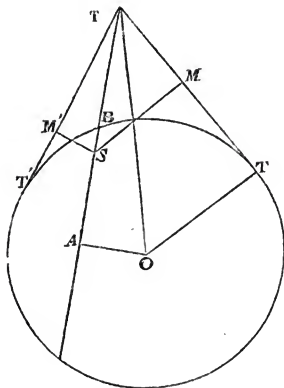
276. È evidente che quel diametro dell'odografo circolare che passa pel centro di forza è diviso dal centro di forza nello stesso rapporto come l'asse maggiore dell'orbita è diviso dal fuoco, e per l'Art. 274 la sua lunghezza $= \frac{2\mu}{h}$.

277. Il Sig. W. R. Hamilton enuncia (*Lectures on Quaternions*, p. 614) la proposizione seguente:

Se due odografi circolari, avendo una corda comune, che passa per un centro comune di forze, o tende ad esso, sono tagliati entrambi perpendicolarmente da un terzo circolo, i tempi per descrivere odograficamente gli archi intercetti saranno eguali.

È evidente dall'Art. 276, che le due orbite sono sezioni coniche della stessa specie, e con gli assi maggiori eguali.

Inoltre, ogni circolo che taglia i due odografi perpendicolar-

mente deve avere il suo centro sulla corda comune. Rappresenti la figura uno degli odografi, S essendo il centro di forza, ed ABP la corda comune. Si prenda un punto qualunque P e si tirino le tangenti PT, PT'. Passiamo ad investigare la differenza dei tempi per descrivere odograficamente TT'' e l'arco corrispondente per una posizione di P leggermente spostato secondo AP.

Si tiri OA perpendicolare ad AP. Siano $OT=a$, $AB=b$, $OA=c$, $SP=r$, $SM=\varpi$, $SM'=\varpi'$, $PO=q$, $PA=r'$, e $PT=PT'=\tau$. Se P si muove per uno spazio δr, l'accrescimento dell'angolo PSM che è l'angolo vettore nell'orbita è $\frac{\varpi\delta r}{r\tau}$ prossimamente. Ma il raggio vettore corrispondente nell'orbita è $\frac{h}{\varpi}$ (Art. 272) e quindi il tempo per descrivere odograficamente il piccolo arco in T è

$$\delta t = \frac{1}{h}\frac{h^2}{\varpi^2}\frac{\varpi\delta r}{r\tau} = \frac{\mu\delta r}{r\tau}\frac{1}{\varpi a}. \text{ (Art. 274).}$$

Quindi l'intero cambiamento prodotto nel tempo per descrivere odograficamente l'arco TT' spostando P è

$$\frac{\mu\delta r}{r\tau}\left(\frac{1}{a\varpi}+\frac{1}{a\varpi'}\right)=\frac{2\mu r'\delta r}{b^2 r^2 \tau}.$$

[Questo si vede facilmente, se notiamo che per la figura

$$\left.\begin{matrix}\varpi\\ \varpi'\end{matrix}\right\} = r \operatorname{sen}\left\{\operatorname{sen}^{-1}\frac{a}{q} \pm \operatorname{sen}^{-1}\frac{c}{q}\right\}. \Big]$$

Ora questo è lo stesso per tutti e due gli odografi, e, siccome l'arco TT' svanisce per ciascuno quando P è in B, abbiamo la proposizione.

Si vedrà subito che questo è in sostanza lo stesso che il Teorema di Lambert. (Art. 160, 161).

278. Prendiamo ora un esempio della determinazione, dall'odografo e dalla legge della sua descrizione, della curva descritta e delle forze agenti.

L'odografo è un circolo descritto con velocità angolare uniforme intorno ad un punto nella sua circonferenza, trovare la traiettoria originale e le circostanze della sua descrizione.

Qui abbiamo nell'odografo,

$$\rho = a\cos\theta\,,$$
$$\theta = \omega t\,;$$

quindi nella traiettoria

$$\frac{dx}{dt} = \rho\cos\theta = a\cos^2\omega t\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho\operatorname{sen}\theta = a\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t.$$

Integrando ed adattando convenientemente le costanti, siccome esse affettano solamente la posizione dell'origine,

$$x=\frac{a}{4\omega}(2\omega t+\operatorname{sen}2\omega t),$$

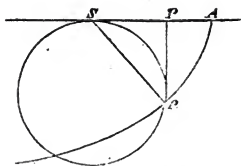
$$y=\frac{a}{4\omega}(1-\cos 2\omega t).$$

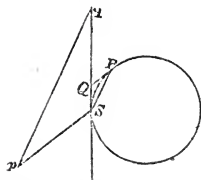
Ora le equazioni della cicloide sono

$$x=A(\varphi+\operatorname{sen}\varphi),$$

$$y=A(1-\cos\varphi);$$

quindi la traiettoria è una cicloide; e, poichè $2\omega t=\varphi$, la direzione del movimento gira uniformemente. L'elemento si muove sotto l'azione di una forza costante perpendicolare alla base della curva cicloidale resistente, e la velocità in ogni punto è quella dovuta alla distanza dalla base che è la brachistocrona dell'Art. 177. L'inverso si dimostra facilmente.

Geometricamente così, se AP è la cicloide descritta dal punto P del circolo SP che rotola uniformemente sulla linea AS, la velocità in P è proporzionale ad SP, e la direzione del moto è perpendicolare ad SP. Quindi l'odografo (girato per un angolo retto nel suo proprio piano) si può rappresentare col circolo SP, descritto con velocità angolare uniforme intorno al punto S. Che il moto sia dovuto ad un'accelerazione costante perpendicolare ad AS è ovvio dal fatto che, se Pp si tira perpendicolare ad AS, SP^2 è proporzionale a Pp.

279. *Se l'orbita è centrale, ed è un circolo descritto intorno ad un punto della sua circonferenza, l'odografo è una parabola descritta intorno al fuoco con velocità angolare proporzionale al raggio vettore.*

Infatti, se S è il centro di forza, P l'elemento nella sua orbita circolare, p il punto corrispondente dell'odografo: qp, la tangente all'odografo in p, deve essere parallela ad SP; e, quindi, se SQq è la tangente in S, il triangolo pSq (essendo simile a PSQ) è isoscele. Così il luogo di p è una parabola, poichè la sua tangente, pq, è egualmente inclinata al raggio vettore Sp, ed alla linea fissa Sq. Inoltre la velocità angolare di Sp, essendo la stessa di quella di PQ, è

il doppio di quella di SP, ed è, perciò, inversamente come SP^2. Ma la lunghezza di Sp è inversamente come la perpendicolare da S sopra PQ, cioè inversamente come SP^2.

280. *Le sole orbite centrali di cui gli odografi sono anche descritti come orbite centrali, sono quelle in cui l'accelerazione varia direttamente come la distanza dal centro.*

Sia S il centro, P un punto qualunque della traiettoria, p il punto corrispondente nell'odografo, p' quello nell'odografo dell'odografo. Allora Sp' è parallela alla tangente in p, la quale ancora è parallela ad SP. Quindi PSp' è una linea retta. Inoltre, poichè p appartiene (per ipotesi) ad un'orbita centrale, la tangente in p' è parallela ad Sp, cioè, alla tangente in P. Quindi il luogo di p' è simile a quello di P, e perciò Sp' è *proporzionale ad* SP. Ma Sp' rappresenta l'accelerazione in P. Quindi la proposizione.

281. *Un punto descrive una spirale logaritmica con velocità angolare uniforme intorno al polo; trovare l'accelerazione.*

Poichè la velocità angolare di SP e l'inclinazione di questa linea alla tangente sono costanti, la velocità lineare di P è come SP. Si prenda una lunghezza PT, eguale ad eSP, per rappresentarla. Allora l'odografo, il luogo di p, in cui Sp è parallela ed eguale a PT, è evidentemente un'altra spirale logaritmica simile alla prima, e descritta con la stessa uniforme velocità angolare. Quindi pt, l'accelerazione richiesta, è eguale ad eSp, e fa con Sp un angolo eguale ad SPT. Quindi, se Pu si tira parallela ed eguale a pt, ed uv parallela a PT, l'intera accelerazione Pu si può risolvere in Pv e vu; e Pvu è un triangolo isoscele, i di cui angoli alla base sono eguali ciascuno all'angolo della spirale. Quindi Pv e vu serbano rapporti costanti a Pu, e perciò anche ad SP o PT.

L'accelerazione, perciò, è composta di una parte centrale attrattiva proporzionale alla distanza, e di una parte tangenziale ritardatrice proporzionale alla velocità.

E, se si considera la parte risoluta del movimento di P parallela ad una linea qualunque nel piano della spirale, è chiaro che in essa anche l'accelerazione consisterà di due parti, l'una diretta verso un punto nella linea (la proiezione del polo della spirale), e proporzionale alla distanza da esso, l'altra proporzionale alla velocità, ma che ritarda il moto.

Quindi un elemento che, senza resistenza, avrebbe un semplice moto armonico, ha, quando è soggetto ad una resistenza proporzionale alla sua velocità, un moto rappresentato dalla parte risoluta del movimento spirale ora descritto.

Se α è l'angolo della spirale, ω la velocità angolare di SP, abbiamo evidentemente $PT \cdot \operatorname{sen}\alpha = SP \cdot \omega$.

Quindi

$$Pv = Pu = pt = \frac{PT^2}{SP} = \frac{\omega}{\operatorname{sen}\alpha} PT = \frac{\omega^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} SP = n^2 \cdot SP$$

(supponiamo) e

$$vu = 2Pv \cdot \cos\alpha = \frac{2\omega\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} PT = k \cdot PT \text{ (supponiamo).}$$

Così la forza centrale all'unità di distanza è $n^2 = \frac{\omega^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}$, ed il coefficiente di resistenza è $k = \frac{2\omega\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Il tempo dell'oscillazione è evidentemente $\frac{2\pi}{\omega}$; ma, se non vi fosse resistenza, le proprietà del semplice moto armonico mostrano che esso sarebbe $\frac{2\pi}{n}$; sicchè esso è accresciuto dalla resistenza nel rapporto $\operatorname{cosec}\alpha : 1$, o $n : \sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}$.

La ragione della diminuzione di SP è evidentemente

$$PT \cdot \cos\alpha = \frac{\omega\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} SP = \frac{k}{2} SP\,;$$

cioè, SP diminuisce in progressione geometrica al crescere del tempo, la ragione essendo $\frac{k}{2}$ per l'unità di tempo per l'unità di lunghezza. Per un ordinario risultato dell'aritmetica (interesse composto pagabile ad ogni istante) la diminuzione di $\log \cdot SP$ nell'unità di tempo è $\frac{k}{2}$.

Questo procedimento di soluzione è solamente applicabile alle vibrazioni armoniche con resistenza quando n è maggiore di $\frac{k}{2}$. Quando n non è maggiore di $\frac{k}{2}$ la curva ausiliaria non può essere più una spirale logaritmica, poichè l'elemento mobile non descrive mai più che un angolo finito intorno al polo. Una curva, derivata da un' iperbole equilatera, con un procedimento in qualche modo simile a quello col quale la spirale logaritmica si deduce da un circolo, si deve introdurre; ed allora il metodo geometrico cessa di essere più semplice dell' analitico, sicchè è inutile di proseguire ulteriormente nella investigazione, almeno da questo punto di vista.

Questi risultati geometrici si possono dedurre facilmente dai principii del capitolo precedente, che danno immediatamente per il moto rettilineo l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + n^2x = 0.$$

ESEMPII.

1. Investigare l'equazione differenziale della traiettoria di un elemento in un piano

$$2X = \frac{d}{dx}\left(\frac{Y - X\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right).$$

2. Un elemento scende per una cicloide invertita dalla quiete nella cuspide; mostrare che l' intera accelerazione ad ogni istante è y, e che la sua direzione è verso il centro del circolo generatore.

3. Quando l' intera forza sopra un elemento è secondo il raggio vettore, mostrare che la forza centrifuga dal polo

$$= \frac{h^2}{r^3}.$$

4. Un elemento si muove in un piano sotto l'azione di forze qualunque, di cui le parti risolute sono P nel raggio vettore, e T perpendicolare al raggio vettore. Mostrare che la corda di curvatura che passa pel polo è $\frac{2v^2}{P+T\cos\psi}$, dove ψ è l' angolo esteriore tra il raggio vettore e la tangente.

5. Una catenaria è descritta liberamente sotto l'azione di una forza parallela all'asse; mostrare che la forza centrifuga è costante.

6. Un elemento, proiettato dall'origine lungo l'asse delle y, descrive la curva $y^2=4ax$ sotto l'azione di una forza μy parallela ad y, ed un'altra parallela ad x; mostrare che

$$v^2=\mu\left(1+\frac{y^2}{4a^2}\right)(c^2+y^2).$$

7. La curva $y=\varphi(x)$ tocca l'asse delle y nell'origine, ed è descritta liberamente da un elemento sotto l'azione delle forze Y parallela ad y, ed f parallela ad x; mostrare che

$$Y=2f\sqrt{x}\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{x}\frac{dy}{dx}\right\},$$

e che se Y è come x^n, n è negativo.

8. Un elemento descrive l'iperbole $x^2=y^2+a^2$, così che

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-c^2.$$

Trovare le forze.

9. La velocità di un elemento nell'orbita centrale varia come $\frac{1}{r^2}$. Applicare il principio della Minima Azione per trovare l'orbita, e quindi la legge della forza. Dedurre gli stessi risultati dalla Conservazione dell'Energia.

10. Mostrare che le quantità di calore e di luce ricevute da un pianeta in una rivoluzione sono inversamente come la radice quadrata del lato retto della sua orbita.

11. Se P, P' sono le forze centrali per un'orbita ed il suo odografo,

$$PP'=\frac{h'^2}{h^2}rr'.$$

12. L'odografo è un circolo intorno ad un punto nella sua circonferenza, e se θ è l'angolo che il raggio vettore fa con il diametro, la velocità angolare è data da

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{k}{\sqrt{(e^{2kt}-1)}};$$

mostrare che la traiettoria è una cicloide col suo vertice in su,

e che la velocità in ogni punto è quella dovuta ad una caduta dalla tangente al vertice.

13. L'odografo per un elemento che si muove in un circolo verticale con la velocità dovuta alla profondità al di sotto del punto più alto è

$$r = c \cos \frac{\theta}{2}.$$

14. Quando l'odografo è una linea retta descritta uniformemente, la traiettoria è quella di un proiettile nel vuoto.

15. Quando essa è una linea retta descritta con uniforme velocità angolare intorno ad un punto, la traiettoria è la catenaria di uniforme resistenza

$$e^{\frac{y}{k}} = \sec \frac{x}{k},$$

e l'accelerazione è parallela ad y e varia come il quadrato di ciascuna di queste quantità eguali.

16. L'odografo per un circolo intorno ad un punto nella circonferenza, è una parabola intorno al fuoco descritta con velocità angolare proporzionale al raggio vettore.

17. Determinare il movimento di un pendolo semplice, che oscilla in piccoli archi, quando il suo punto di sospensione descrive, uniformemente, un circolo orizzontale.

Spiegare la specialità della soluzione quando il tempo della rotazione del punto di sospensione è eguale a quello di una completa oscillazione del pendolo.

18. Applicare il principio dell'Azione Variante all'investigazione del moto di un pendolo semplice, leggermente disturbato in un modo qualunque dalla sua posizione di equilibrio.

19. Trovare la forma delle superficie di eguale azione per elementi proiettati orizzontalmente dai punti di una linea verticale, la velocità essendo dovuta alla distanza da un dato piano orizzontale.

20. Trovare analiticamente un'orbita centrale di cui la forma ed il modo di descrizione corrispondano con quelli dell'odografo di un'altra orbita centrale.

Mostrare che vi è una sola legge di forza centrale per la quale questo è possibile eccetto, naturalmente, nel caso in cui l'orbita originale è un circolo intorno al suo centro, quando *ogni* legge di forza si può ottenere. Art. 280.

21. Un elemento è sollecitato da una forza ripulsiva che tende da un punto fisso, e da un'altra forza parallela ad una linea fissa, e quando l'elemento è ad una distanza r dal punto fisso, le grandezze di queste forze sono

$$\frac{\mu}{r^2}\left(1-\frac{r}{a}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\mu}{r^2}\left(\frac{r^2}{c^2}+\frac{r}{a}\right),$$

μ, a, c essendo costanti; mostrare che se l'elemento è abbandonato all'azione delle forze in un punto nel quale esse sono eguali tra loro, esso procederà a descrivere una parabola di cui il punto fisso è il fuoco.

22. Un elemento è sollecitato da una forza di cui la direzione incontra sempre una linea retta indefinita AB ad angoli retti, e l'intensità della quale è inversamente proporzionale al cubo della distanza dell'elemento dalla linea. L'elemento è proiettato con la velocità dall'infinito da un punto P ad una distanza a dal punto più vicino O della linea in una direzione perpendicolare ad OP, ed inclinata sotto l'angolo α al piano AOP. Dimostrare che l'elemento è sempre sulla sfera di cui O è il centro; che esso incontra ogni linea meridiana per AB sotto l'angolo α; e che essa raggiunge la linea AB nel tempo $\frac{a^2}{\sqrt{\mu \cos\alpha}}$, μ essendo la forza assoluta.

23. Un cono retto levigato ha il suo semi-angolo al vertice α, ed una linea generatrice verticale, il vertice essendo in su: un elemento è proiettato secondo la tangente orizzontale, da un punto della linea generatrice opposta a quella verticale, ad una distanza r dal vertice, e con una velocità $2\,\mathrm{sen}\alpha\sqrt{gr}$. Lascerà esso il cono o no?

24. Un elemento legato ad un leggiero filo elastico è lasciato cadere dal punto fisso al quale l'altro estremo del filo è attaccato. Si tracci una linea che rappresenti con le sue ordinate la forza viva a misura che esso cade. Mostrare che essa consisterà di un arco di una parabola, e della tangente in una estremità. Inoltre mostrare che la massima forza viva eccede quella nel punto dove il filo diviene teso per una metà di quel che sarebbe il suo eccesso in quel punto se non vi fosse il filo per frenarlo.

25. Un cono retto levigato ha il suo asse verticale ed il vertice in giù. Un elemento è proiettato dentro di esso in una tangente orizzontale ad una distanza R dall'asse con velocità $R\Omega$. Mostrare che quando esso si muove di nuovo orizzontalmente la sua distanza (r) dall'asse è data da $R^2(R+r)\Omega^2\tan\alpha = 2gr^2$, α essendo il semi-angolo al vertice del cono.

26. Un elemento si muove sotto l'azione di due forze costanti nel rapporto di 9 ad 1 le di cui direzioni girano in direzioni opposte con velocità angolari uniformi nel rapporto di 3 ad 1; dimostrare che sotto alcune condizioni iniziali la traiettoria dell'elemento sarà una curva chiusa della stessa forma di quella rappresentata dall'equazione $r = a\cos 2\theta$.

27. Una superficie levigata è generata dalla rotazione della curva $x^2y=c^3$ intorno all'asse delle y che è verticalmente in giù, ed un elemento pesante è proiettato lungo la superficie con velocità dovuta alla profondità al di sotto del piano orizzontale per l'origine; dimostrare che la sua traiettoria interseca tutti i meridiani sotto un angolo costante.

28. Un elemento è legato ad un filo elastico, l'altro estremo del quale è fisso. Mostrare che se l'elemento è proiettato in un piano verticale, la parte della sua forza viva in una posizione qualunque dovuta all'azione del filo è proporzionale al quadrato della distensione del filo. [Di quale è questo un caso particolare?],

29. Un emisfero fisso di raggio a ha il suo asse verticale, ed una scannellatura è tracciata su di esso di cui l'equazione è

$$l = a \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2a}\right),$$

la posizione di ogni punto della sfera essendo determinata da λ, la lunghezza dell'arco di un circolo massimo perpendicolare alla base dell'emisfero intercetta tra il punto e la base, e da l la lunghezza dell'arco della base; se un elemento è proiettato dalla base nella scannellatura con una velocità $\sqrt{2ga}$, mostrare che il tempo per percorrere un arco di lunghezza s

$$= \sqrt{\frac{2a}{g}} \log \frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\tan\left(\frac{\pi}{8} - \frac{s}{4a\sqrt{2}}\right)}.$$

30. Se P e Q sono le forze acceleratrici secondo la tangente e la normale alla traiettoria di un elemento, e ψ l'angolo che la tangente fa con una linea fissa, l'equazione dell'odografo sarà

$$r = ae^{\int_0^\psi \frac{P}{Q} d\psi}$$

dove a è una costante.

31. Una lemniscata di cui l'equazione è $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ è situata con la linea iniziale verticale, ed un elemento pesante è costretto a muoversi su di essa, partendo dalla quiete nel polo; dimostrare che l'odografo è definito dall'equazione

$$r^4 = c^4 \cos \frac{\pi + 2\varphi}{3} \cos^2 \frac{\pi + 2\varphi}{6}.$$

dove c è una costante.

32. Mostrare che la forza centrale necessaria a fare che un elemento descriva l'odografo di un'orbita centrale è inversamente proporzionale alla forza normale nel punto corrispondente dell'orbita.

33. Un elemento descrive una data orbita intorno ad un centro di forza, ed un altro elemento descrive l'odografo di quell'orbita sotto l'azione di una forza nel polo dell'odografo; mostrare che il prodotto delle accelerazioni degli elementi in due punti corrispondenti delle loro orbite varia come il prodotto delle distanze centrali di quei punti.

34. Un elemento si muove liberamente sotto l'azione di una forza la di cui direzione è sempre parallela ad un piano fisso, e descrive una curva che giace su di un cono retto circolare, e taglia le linee generatrici sotto un angolo costante; dimostrare che il suo odografo è una sezione conica.

35. Un punto descrive una certa curva, la sua accelerazione essendo inizialmente normale, e quando la sua direzione del moto ha girato per un angolo φ, quella dell'accelerazione ha girato per un angolo 2φ nella stessa direzione; dimostrare che l'accelerazione varia come $\cos \varphi \dfrac{d\varphi}{ds}$; e che l'odografo sarà un circolo descritto intorno ad un punto nella circonferenza.

36. Se la Brachistocrona è una conica intorno al fuoco, l'odografo di un elemento che la descrive sarà un circolo.

37. La resistenza dell'aria essendo supposta variare come il cubo della velocità, mostrare che l'odografo di un proiettile è

$$x^3 + 3xy^2 = ay^3 + b,$$

l'asse delle x essendo verticale.

38. Un elemento sotto l'azione di un sistema di forze descrive la loro tautocrona in un tempo T. Mostrare che l'azione in una

completa oscillazione è

$$\frac{2\pi^2 c^2}{T},$$

dove c è la lunghezza dell' arco descritto.

39. Trovare col metodo dell' Art. 261 la relazione tra la velocità e la distanza dal centro di forza affinchè la brachistocrona sia un circolo.

40. Dimostrare che un pianeta che si muove liberamente intorno ad un centro di forza in un fuoco della sua orbita ellittica descrive una brachistocrona (per la stessa legge di velocità in quanto riguarda la posizione) intorno all' altro.

CAPITOLO X.

Urto.

282. Passiamo ora alla considerazione degli effetti di una classe di forze che non possono essere trattate con i metodi impiegati nei capitoli precedenti. Queste si chiamano forze *Impulsive*, e sono come quelle che nascono nei casi di collisione; durando (nel caso di corpi di moderate dimensioni) solamente per un tempo eccessivamente piccolo, e nondimeno producendo cambiamenti finiti di quantità di moto. Quindi, nel trattare con gli effetti immediati di tali forze, non è necessario che forze *finite* agenti insieme con esse siano considerate.

Quando due palle di vetro o di avorio si urtano scambievolmente, senza dubbio ha luogo un'operazione molto complicata durante il breve intervallo del contatto. Prima, le porzioni delle superficie immediatamente in contatto sono sfigurate e compresse finchè le forze molecolari così chiamate in azione siano sufficienti a resistere ad ulteriore contorsione e compressione. In questo istante è evidente che i punti in contatto si muovono con la stessa velocità. Ma, la maggior parte dei solidi essendo dotati di un certo grado di elasticità di forma, le palle tendono a riprendere la loro forma sferica, e si genera una pressione addizionale; proporziale, come Newton trovò con l'esperimento, a quella esercitata durante la compressione. Il coefficiente di proporzionalità è una quantità determinabile con l'esperimento, e si può chiamare convenientemente il *Coefficiente di Restituzione*. Esso è sempre minore dell'unità.

Il metodo per trattare le quistioni in cui entrano forze di questa natura sarà meglio spiegato prendendo come un esempio il caso dell'*urto diretto di una palla sferica su di un'altra;* prima, quando le palle sono inelastiche. Ancora, quando il loro coefficiente di restituzione è dato.

Ed è evidente che nel caso dell'urto diretto di sfere levigate e non rotanti possiamo considerarle come semplici elementi, poichè ogni cosa è simmetrica intorno alla linea che unisce i loro centri.

283. Supponiamo che una sfera di massa M, che si muove con una velocità v, raggiunga ed urti un'altra di massa M', che si muove nella stessa direzione con velocità v'; e che nell'istante

in cui la mutua compressione è completa, le sfere si muovano con una velocità comune V. Se P è l'azione comune tra esse ad un tempo qualunque t durante la compressione, essa deve essere evidentemente della natura di una pressione esercitata da ciascuna sull'altra; ed abbiamo, se τ è il tempo durante il quale ha luogo la compressione,

$$M(v - V) = \int_0^\tau P dt = R, \text{ supponiamo.}$$

$$M'(V - v') = \int_0^\tau P dt = R;$$

onde $$V = \frac{Mv + M'v'}{M + M'}, \quad \text{ed} \quad R = \frac{MM'}{M + M'}(v - v').$$

Da questi risultati vediamo che l'intera quantità di moto dopo l'urto è la stessa come prima, e che la velocità comune è quella del centro d'inerzia prima dell'urto. Se le palle si movessero in direzioni opposte, v' sarebbe negativa, ed in questo caso avremmo

$$V = \frac{Mv - M'v'}{M + M'}, \quad \text{ed} \quad R = \frac{MM'}{M + M'}(v + v').$$

Dal primo di questi risultati apparisce che le due palle si ridurranno in quiete se

$$Mv = M'v';$$

cioè, se le loro quantità di moto sono originalmente eguali ed opposte.

Questa è la soluzione completa del problema se le palle sono inelastiche, o sia non hanno alcuna tendenza a riprendere la loro forma primitiva dopo la compressione.

284. Se le palle sono elastiche, si genererà, con la loro tendenza a riprendere le loro forme primitive, un'addizionale azione o reazione proporzionale ad R.

Sia e il coefficiente di restituzione, e siano v_1, v_1', le velocità delle palle quando finalmente si separano. Allora, come sopra,

$$M(V - v_1) = eR,$$

$$M(v_1' - V) = eR;$$

onde

$$Mv_1 = M\frac{Mv + M'v'}{M + M'} - e\frac{MM'}{M + M'}(v - v'),$$

e $$v_1 = \frac{(M - eM')v + M'(1+e)v'}{M+M'} = v - \frac{M'}{M+M'}(1+e)(v-v'),$$

con una simile espressione per v_1'.

Un risultato piuttosto singolare si può dedurre facilmente dall'ultima formola. Si supponga $M=M'$, $e=1$, cioè, siano le palle di masse eguali, ed il loro coefficiente di restituzione sia l'unità (o, nella comune, ma molto impropria fraseologia), « Si supponga che le palle siano *perfettamente elastiche* »; allora in questo caso

$$v_1 = v', \text{ e similmente } v_1' = v,$$

o le palle, qualunque siano le loro velocità, le scambiano tra loro, ed il moto è lo stesso come se esse fossero passate l'una attraverso l'altra senza esercitare alcuna azione scambievole.

285. Il solo altro caso che possiamo trattare nella presente opera è quello dell'urto obliquo quando le palle sono sferiche e perfettamente levigate, poichè nelle palle scabre e non sferiche si generano delle rotazioni ed il moto di ciascuna palla richiede di esser trattato come quello di un corpo rigido.

Il caso più semplice è quello di *un elemento che urta con data velocità, ed in una data direzione, su di un piano levigato.*

Supponiamo che il piano del moto dell'elemento si prenda per quello di relazione; la sua traccia sul piano dato per asse delle x, ed il punto nel quale l'urto ha luogo, per origine.

L'effetto impulsivo del piano sarà evidentemente perpendicolare ad esso, essendo il piano levigato. Si chiami questo R; e la velocità dell'elemento si risolva in due v_x, v_y, rispettivamente parallele agli assi. Per la prima parte dell'urto

$$M(v_x - v_x') = 0,$$

$$M(v_y - v_y') = R.$$

Ma v_y', essendo la velocità comune del piano e della palla, è evidentemente zero; quindi

$$v_x' = v_x, \quad v_y' = 0,$$

o, la velocità parallela al piano non è alterata, mentre quella perpendicolare ad esso è distrutta. Tanto per una palla inelastica. Se la palla è elastica, siano v_x'', v_y'' le velocità finali, allora

$$M(v_x' - v_x'') = 0,$$

$$M(v_y' - v_y'') = eR.$$

Queste equazioni danno

$$v_x'' = v_x' = v_x,$$

e mostrano che la velocità parallela al piano non è alterata; ed

$$Mv_y'' = -eR = -eMv_y,$$

o,

$$v_y'' = -ev_y,$$

cioè, la velocità perpendicolare al piano è rivolta in direzione opposta, e diminuita nel rapporto $e:1$.

Se denotiamo col nome di angolo d'incidenza l'inclinazione della direzione originale del moto della palla alla normale al piano, e diamo quello di angolo di riflessione all'angolo fatto con la stessa linea dalla traiettoria dopo dell'urto; allora dinotando le velocità totali prima e dopo dell'urto con V e V'', e questi angoli con θ, φ rispettivamente, abbiamo

$$V \operatorname{sen} \theta = v_x, \quad V'' \operatorname{sen} \varphi = v_x'',$$
$$V \cos \theta = v_y, \quad V'' \cos \varphi = v_y'';$$

ed i risultati precedenti danno immediatamente

$$\left.\begin{aligned} e \cot \theta &= \cot \varphi \\ V'' &= V \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \varphi} \end{aligned}\right\}.$$

Naturalmente questi risultati sono applicabili ai casi di urto sopra superficie levigate qualunque; facendo la legittima supposizione che l'urto, e le sue conseguenze riguardo al movimento della palla, sarebbero le stesse se per la superficie si sostituisse il suo piano tangente nel punto di contatto.

286. *Due sfere levigate, che si muovono in date direzioni e con date velocità, si urtano; determinare l'urto ed il moto susseguente.*

Siano le masse delle sfere M, M'; le loro velocità prima dell'urto v e v'; e le direzioni originali del moto facciano con la linea che congiunge i centri nell'istante dell'urto, gli angoli α, α'. Questi angoli si possono facilmente calcolare dai dati, se i raggi delle sfere sono dati.

È evidente che, siccome le sfere sono levigate, l'intera azione impulsiva ha luogo nella linea che congiunge i centri nell'istante dell'urto, e che perciò il moto seguente di ciascuna sfera sarà nel piano che passa per questa linea e per la direzione originale del moto.

Sia R l'impulso, e il coefficiente di restituzione; allora poichè le velocità nella linea dell'urto sono $v \cos\alpha$ e $v' \cos\alpha'$, abbiamo per i loro valori finali v_1, v_1', dopo la restituzione, per l'Art. 284, le espressioni

$$v_1 = v\cos\alpha - \frac{M'}{M+M'}(1+e)(v\cos\alpha - v'\cos\alpha'),$$

$$v_1' = v'\cos\alpha' + \frac{M}{M+M'}(1+e)(v\cos\alpha - v'\cos\alpha'),$$

ed il valore di R è

$$\frac{MM'}{M+M'}(1+e)(v\cos\alpha - v'\cos\alpha').$$

Quindi, la sfera M ha finalmente una velocità v_1 nella linea che congiunge i centri, ed una velocità $v \operatorname{sen}\alpha$ in una direzione conosciuta perpendicolare a questa, cioè nel piano per questa e per la sua direzione originale del moto. E similmente per la sfera M''. Così l'urto è completamente determinato.

287. Ricorrendo alle equazioni nell'Art. 283, abbiamo

$$M(v-V) = R,$$

$$M'(V-v') = R,$$

ed, eliminando V,

$$R = \frac{MM'}{M+M'}(v-v') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Quindi, se e è il coefficiente di restituzione, e v_1, v_1' sono le velocità finali,

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v - \frac{R(1+e)}{M} \\ v_1' &= v' + \frac{R(1+e)}{M'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Quindi, $Mv_1 + M'v_1' = Mv + M'v'$, qualunque sia e, o sia non vi è perdita di quantità di moto. Questo è, come è chiaro, una conseguenza diretta della Terza Legge del Moto.

Ancora,
$$Mv_1^2 + M'v_1'^2 = Mv^2 + M'v'^2$$
$$- 2R(1+e)(v-v') + R^2(1+e)^2\frac{M+M'}{MM'}$$
$$= Mv^2 + M'v'^2 - R^2(1+e)^2\frac{M+M'}{MM'}\left(\frac{2}{1+e} - 1\right).$$

L'ultimo termine del secondo membro è quindi due volte l'energia cinetica apparentemente distrutta nell'urto. Quando $e=0$, la sua grandezza è massima ed eguale ad $\frac{MM'}{M+M'}(v-v')^2$. Quando $e=1$ la sua grandezza è zero, cioè, nell'urto diretto quando il coefficiente di restituzione è l'unità non vi è perdita di energia cinetica.

L'energia cinetica che sembra di essere distrutta in alcuni di questi casi è solamente trasformata; parte lo può essere in calore, parte in vibrazioni sonore, come nell'urto di un martello su di una campana. Ma, ad onta di questo, l'elasticità può essere *perfetta*. Quindi l'assurdità della comune denominazione a cui si allude nell'Art. 284.

Inoltre da (2),

$$v_1' - v_1 = v' - v + R(1+e)\frac{M+M'}{MM'}$$

$$= e(v - v'), \text{ per } (1).$$

Quindi la velocità di separazione è e volte quella dell'urto. Questi risultati si possono estendere facilmente al caso più generale dell'Art. 286.

288. Passiamo ad alcuni problemi speciali che illustrano il soggetto dell'urto.

Ad una estremità di una catena uniforme e perfettamente flessibile, giacente in una data curva sopra un piano orizzontale levigato, è applicata una data tensione impulsiva nella direzione della tangente in quella estremità; si cerca di trovare la tensione impulsiva in ogni altro punto della catena.

Sia questa T in un punto della catena di cui le coordinate sono x, y; e le velocità iniziali di quel punto, parallele agli assi, siano v_x, v_y; allora, μ essendo la massa di un'unità di lunghezza della catena, abbiamo le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) &= \mu v_x \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) &= \mu v_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

La condizione geometrica si deve determinare come segue. La catena essendo inestensibile, la lunghezza di un elemento δs è invariabile, quindi le velocità delle sue due estremità risolute

secondo l'elemento debbono essere le stesse. Questo dà evidentemente

$$\frac{dv_x}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{dv_y}{ds}\frac{dy}{ds}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Da queste equazioni passiamo ad eliminare v_x, v_y. Differenziando (1) rispetto ad s, abbiamo

$$\mu\frac{dv_x}{ds}=T\frac{d^3x}{ds^3}+2\frac{dT}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d^2T}{ds^2}\frac{dx}{ds},$$

$$\mu\frac{dv_y}{ds}=T\frac{d^3y}{ds^3}+2\frac{dT}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d^2T}{ds^2}\frac{dy}{ds}.$$

Moltiplicando queste per $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, rispettivamente, ed addizionando, abbiamo da (2),

$$T\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}\right)+2\frac{dT}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)$$

$$+\frac{d^2T}{ds^2}\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ma

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1;$$

si differenzii, ed abbiamo

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}=0;$$

differenziando di nuovo, e trasponendo, abbiamo

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}=-\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{\rho^2},$$

dove ρ è il raggio di curvatura dell'elemento δs.

Per mezzo di queste espressioni (3) prende la forma finale

$$\frac{d^2T}{ds^2}-\frac{T}{\rho^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Questa non si può naturalmente integrare a meno che la forma iniziale della catena non sia conosciuta, cioè a meno che ρ non sia dato in termini di s.

Per trovare la direzione istantanea del movimento di un punto qualunque, dobbiamo trovare v_x e v_y, ed il loro rapporto è la tangente dell' angolo che la direzione richiesta fa con l' asse delle x. Queste quantità si debbono trovare per mezzo di (1) dal valore di T dato da (4).

289. Esempio I. Come un esempio particolare, supponiamo che la catena formi un semicircolo di raggio a. Allora $\rho=a$, e (4) diviene

$$\frac{d^2T}{ds^2}-\frac{T}{a^2}=0\ ,$$

di cui l' integrale è

$$T=Ae^{\frac{s}{a}}+Be^{-\frac{s}{a}}.$$

Per determinare le costanti arbitrarie, osserviamo che quando

$$s=0,\quad \text{abbiamo}\quad T=T_0$$

l' impulso originale; e quando $s=\pi a$, o all' estremità libera della catena, $T=0$. Così abbiamo

$$T_0=A+B,$$
$$0=Ae^{\pi}+Be^{-\pi}$$

Queste danno $\quad A=-\dfrac{T_0e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}},\ B=\dfrac{T_0e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$;

e quindi

$$T=\frac{T_0\left\{e^{\pi-\frac{s}{a}}-e^{-\left(\pi-\frac{s}{a}\right)}\right\}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

$$=T_0\frac{e^{(\pi-\theta)}-e^{-(\pi-\theta)}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5),$$

se $s=a\theta$, cioè se T è la tensione impulsiva in un punto di cui la distanza dall' estremo teso sottende un angolo θ al centro.

Supponiamo ora che l' asse delle y sia la tangente all'estremo teso; quello delle x essendo il diametro che passa per quel punto, allora

$$x=a\,(1-\cos\theta),$$
$$y=a\operatorname{sen}\theta.$$

Queste danno
$$\frac{dx}{ds} = \operatorname{sen}\theta,$$
$$\frac{dy}{ds} = \cos\theta;$$

dalle quali, per (1) e (5),
$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{d}{d\theta}[\cos\theta\{e^{\pi-\theta} - e^{-(\pi-\theta)}\}]}{\frac{d}{d\theta}[\operatorname{sen}\theta\{e^{\pi-\theta} - e^{-(\pi-\theta)}\}]}.$$

Differenziando, e poi sostituendo diversi valori di θ, otteniamo le direzioni iniziali del moto dei punti corrispondenti della catena. Così, per l'estremo teso, si vedrà facilmente che, ponendo $\theta=0$, abbiamo
$$\frac{v_y}{v_x} = -\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}.$$

Per l'estremo libero
$$\frac{v_y}{v_x} = \infty,$$

come dovevamo aspettarci, poichè non vi è inizialmente alcuna forza in esso parallela all'asse delle x.

290. Esempio II. Supponiamo che si voglia la tensione in ciascun punto proporzionale alla distanza dall'estremo libero della catena.

Allora l essendo la lunghezza, ed s dinotando la stessa quantità come sopra,
$$T = T_0\left(1 - \frac{s}{l}\right) \text{ per ipotesi};$$

onde $$\frac{d^2T}{ds^2} = 0, \quad \text{o per (4)} \quad \frac{T}{\rho^2} = 0, \quad \text{o} \quad \rho = \infty,$$

cioè, la catena deve giacere in una linea retta, come è d'altronde evidente.

291. Esempio III. Supponiamo che la catena formi una porzione della spirale logaritmica. In questo caso $\rho=\varepsilon s$ dove ε è la cotangente dell'angolo della spirale. Quindi l'equazione diviene
$$\frac{d^2T}{ds^2} - \frac{T}{\varepsilon^2 s^2} = 0,$$

o, se poniamo $s = ae^{\varphi}$,

$$\frac{d^2T}{d\varphi^2} - \frac{dT}{d\varphi} - \frac{T}{\varepsilon^2} = 0.$$

Questa s'integra facilmente, e così il problema si può risolvere completamente.

292. *Trovare l'angolo che la direzione iniziale del moto di un elemento qualunque fa con la tangente corrispondente.*

Generalmente, sia $\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)}$,

e $$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}.$$

Allora $(\varphi-\psi)$ è l'angolo richiesto; e

$$\tan(\varphi-\psi) = \frac{\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)\frac{dx}{ds} - \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)\frac{dy}{ds}}{\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)\frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)\frac{dy}{ds}}$$

$$= \frac{T\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)}{\frac{dT}{ds}}$$

$$= \frac{T}{\rho\frac{dT}{ds}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Quindi ancora, se la condizione è che ogni elemento della catena si deve muovere inizialmente secondo la catena, $\varphi-\psi=0$, e quindi $\rho=\infty$, o la catena deve giacere in una linea retta.

293. *Trovare la velocità iniziale assoluta di ogni elemento della catena.*

Innalzando a quadrato ed addizionando le equazioni (1), dopo di aver eseguito le differenziazioni indicate, abbiamo

$$\mu^2 (v_x^2 + v_y^2) = \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \right\}$$

$$+ 2T \frac{dT}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right)$$

$$+ T^2 \left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 \right\}$$

$$= \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + \frac{T^2}{\rho^2}, \quad \text{(Art. 288).}$$

Ancora, se v_s è la velocità di un elemento risoluta secondo la tangente corrispondente,

$$v_s^2 = (v_x^2 + v_y^2) \cos^2 (\varphi - \psi)$$

$$= \frac{1}{\mu^2} \left\{ \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + \frac{T^2}{\rho^2} \right\} \frac{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2}{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + \frac{T^2}{\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{dT}{ds}\right)^2,$$

la quale avrebbe potuto trovarsi immediatamente da

$$\mu v_x = \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right),$$

prendendo l'asse delle x parallelo all'elemento δs.

294. Questi problemi si potrebbero forse risolvere più speditamente trovando le equazioni del moto impulsivo dell'elemento secondo la tangente e perpendicolarmente ad essa. Chiamando v_s, v_ρ, le velocità iniziali in queste direzioni, abbiamo immediatamente

$$\left. \begin{aligned} \delta T &= \mu v_s \delta s \\ \frac{T}{\rho} \delta s &= \mu v_\rho \delta s \end{aligned} \right\},$$

la direzione di v_ρ essendo verso il centro di curvatura.

La condizione cinematica fornita dall'inestensibilità della catena è

$$v_\rho = \rho \frac{dv_s}{ds}.$$

Da queste equazioni i risultati precedenti si possono dedurre facilmente. Ed il lettore può facilmente estendere da sè il procedimento di questo articolo o l'Art. 288 ad una catena di sezione variabile originalmente in riposo nella forma di una curva a doppia curvatura.

L'investigazione del moto che ha luogo *dopo* l'urto non si considera comunemente nella Dinamica di un elemento; ma è chiaro da quello che abbiamo detto che possiamo scrivere le equazioni del moto di una catena nella forma

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X, \text{ etc.}$$

le forze finite X, etc. presentandosi ora che non dobbiamo più trattare dell'urto.

Quando la catena è distesa, e praticamente inestensibile, e quando lo spostamento è piccolo, possiamo scrivere x per s se prendiamo la direzione non disturbata della catena per asse delle x. Le equazioni della vibrazione transversale diventano allora

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\mu}\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{T}{\mu}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Lo studente deve particolarmente osservare che siamo ora condotti ad equazioni differenziali *parziali*.

295. Il solo altro caso che considereremo è quello di una serie continua di urti infinitamente piccoli, il di cui effetto è comparabile con quello di una forza finita. Il metodo ovvio di considerare un tal problema si è di valutare *separatamente* i cambiamenti nella velocità prodotti dalle forze finite, e dagli urti, nello stesso tempo infinitamente piccolo δt, e di comporre questi per l'effetto attuale sul moto in quel periodo.

296. *Una goccia sferica di pioggia, che discende per l'azione della gravità, riceve continuamente per la precipitazione del vapore un accrescimento di massa proporzionale alla sua superficie; a essendo il suo raggio quando incomincia a discendere, ed* r *il suo raggio dopo l'intervallo* t, *mostrare che la sua velocità è data dall'equazione*

$$v = \frac{gt}{4}\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3}\right),$$

non tenendo conto della resistenza dell'aria. (Challis, *Smith's Prize Examination*, 1853).

Sia e la spessezza dello strato di fluido depositato nell'unità di tempo. Allora evidentemente

$$r = a + et \text{ ....} \quad (1).$$

Inoltre sia $\delta v = \delta_1 v + \delta_2 v$ l'accrescimento di velocità nel tempo δt; il primo termine dovuto alla gravità, il secondo agli urti.

Evidentemente, $\delta_1 v = g\delta t$; e se M è la massa al tempo t, $\delta(Mv) = 0$ è la condizione dell'urto.

Questo dà

$$M\delta_2 v = -v\delta M,$$

o

$$\delta_2 v = -v\frac{4\pi r^2 e\delta t}{\frac{4}{3}\pi r^3} = -\frac{3ev\delta t}{r} = -\frac{3ev\delta t}{a+et}.$$

Da queste abbiamo

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3ev}{a+et}.$$

Moltiplicando per $(a+et)^3$, e portando l'ultimo termine nel primo membro dell'equazione, essa dà evidentemente

$$(a+et)^3 v = \frac{g}{4e}(a+et)^4 + C.$$

Ma

$$0 = \frac{g}{4e}a^4 + C \text{ per condizione.}$$

Quindi

$$v = \frac{g}{4e}\left\{(a+et) - \frac{a^4}{(a+et)^3}\right\}.$$

Sostituendo per e da (1),

$$v = \frac{gt}{4(r-a)}\left(r - \frac{a^4}{r^3}\right)$$

$$= \frac{gt}{4}\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3}\right),$$

come si chiedeva.

Per verificare questa soluzione, supponiamo che non si depositi umidità, allora $r=a$, ed abbiamo $v=gt$ come deve essere.

297. *Un estremo,* B, *di una catena pesante uniforme pende da una piccola carrucola levigata* A, *e l'altro è raggomitolato su di una tavola in* C. *Se* B *prepondera, determinare il moto.*

La forza motrice dovuta alla gravità è il peso di AB meno quello di $AC = \mu g(x-a)$ supponiamo.

Ora in un intervallo infinitamente piccolo δt, questa genererebbe nella porzione BAC della catena un incremento di velocità

$$\delta_1 v = \frac{\mu g\,(x-a)}{\mu\,(x+a)}\,\delta t. \quad \text{(Si vegga Cap. XII).}$$

Ma l'intera catena non raggomitolata, essendo in moto nel principio dell'intervallo δt con velocità v, solleva una porzione di lunghezza $v\delta t$ dalla tavola durante quell'intervallo. Quindi, se $\delta_2 v$ è il cambiamento di velocità proveniente da questo urto, abbiamo per la condizione che non si perde quantità di moto, cioè

$$V' = \frac{MV}{M+M'},$$

$$v + \delta_2 v = \frac{\mu\,(x+a)\,v}{\mu(x+a) + \mu.v\delta t},$$

o

$$\delta_2 v = -\frac{v^2\,\delta t}{x+a},$$

le quantità di secondo ordine e di ordini superiori essendo trascurate.

Quindi siccome
$$\frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\delta_1 v}{\delta t} + \frac{\delta_2 v}{\delta t},$$

passando al limite abbiamo

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{g\,(x-a) - v^2}{(x+a)};$$

che dà
$$(x+a)^2 v\frac{dv}{dx} + v^2(x+a) = g\,(x^2 - a^2),$$

o
$$(x+a)^2 v^2 = (x+a)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2g\int (x^2 - a^2)\,dx,$$

e questa determina per date circostanze iniziali qualunque la velocità ad ogni istante. L'integrazione finale, per la determinazione di t in termini di x, richiede l'uso delle Funzioni Ellittiche.

ESEMPII.

1. Se $e=1$, una palla non può essere ridotta in quiete dall'urto diretto su di un'altra palla eguale, a meno che questa non sia in quiete.

2. Se due palle per le quali $e=1$ si urtano direttamente con velocità eguali, le loro masse debbono stare come $1:3$ affinchè una possa essere ridotta in quiete.

3. Mostrare che se due palle eguali ($e<1$) si urtano direttamente con velocità $\frac{1+e}{1-e}V$ e $-V$, la prima sarà ridotta in quiete.

4. Mostrare che la massa della palla che deve essere interposta direttamente tra M in quiete, ed M' che si muove con una data velocità V, affinchè M acquisti la massima velocità, è

$$\sqrt{(MM')},$$

e che quella velocità massima è $\frac{M'V(1+e)^2}{\{\sqrt{M}+\sqrt{M'}\}^2}$.

5. Supponiamo $e=1$, e che un numero infinito di palle siano interposte, mostrare che la velocità massima che si può dare così ad M, è

$$V\sqrt{\frac{M'}{M}}.$$

[Si noti che, pel risultato della questione precedente, le masse debbono formare una serie geometrica, e la formola suddetta si deduce facilmente].

6. Elementi per i quali $e=1$ scendono per i raggi vettori dal fuoco di una parabola di cui l'asse è orizzontale ed il piano verticale. Dopo la riflessione sulla curva essi descrivono le loro traiettorie. Quale è il luogo dei fuochi?

7. A urta su B, mostrare che la deviazione di A è massima quando la sua tangente è $\frac{1}{2}\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\left(\frac{1-e}{2}\right)}$.

8. Un elemento pel quale $e=\frac{1}{m}$ è proiettato da un punto in un piano orizzontale levigato. Trovare fin dove esso va prima che cessi di rimbalzare. Mostrare che i tempi tra i rimbalzi consecutivi sono in una serie geometrica di cui la ragione è $\frac{1}{m}$, e le altezze al di sopra del piano in un'altra di cui la ragione è $\frac{1}{m^2}$.

9. Un elemento pel quale $e=1$ è proiettato dal piede di un piano inclinato in una direzione che fa un angolo β col piano; il piano è inclinato sotto un angolo α all'orizzonte. Mostrare che se $2\tan\beta=\cot\alpha$, l'elemento ritornerà dopo un rimbalzo al punto di proiezione.

Se vi sono due rimbalzi prima di tornare indietro al punto di proiezione, ed il coefficiente di restituzione è e,

$$\cot\beta = (1 + e + e^2)\tan\alpha,$$

10. AOB è il diametro verticale di un circolo. Un elemento pel quale $e=1$ scende per una corda AC, ed è riflesso in BC. Il luogo del fuoco della sua traiettoria è il circolo di cui il diametro è AO.

11. Se la direzione nella quale una palla si muove quando urta su di un'altra palla eguale in quiete, bisega l'angolo tra le loro future direzioni; allora quell'angolo è

$$2\tan^{-1}\sqrt{e}.$$

12. Se $e=\frac{1}{2}$, trovare la direzione nella quale una palla deve essere proiettata contro un muro verticale levigato, in modo da ritornare, con la minima velocità possibile, al punto di proiezione.

13. ABC è un triangolo, a, b, c sono i punti di contatto del circolo iscritto con i lati, a essendo in BC, etc. Mostrare che se un elemento proiettato da a in b è riflesso in c, $Ab=eCb$, e se esso ritorna in a,

$$AB = eAC.$$

14. Più palle A, B, C, etc. per le quali e è dato, sono situate in una linea; A è proiettata con data velocità in modo da urtare B, B quindi urta C, e così di seguito; trovare le masse delle palle B, C, etc. affinchè ciascuna delle palle A, B, C, etc. si riduca in quiete urtando sulla seguente; e trovare la velocità dell'n^{ma} palla dopo il suo urto con la $(n-1)^{ma}$.

15. Una palla è proiettata in una data direzione dentro di un anello orizzontale fisso, in modo da andare rimbalzando dalla superficie dell'anello; trovare il limite al quale si avvicinerà la velocità, e mostrare che si raggiunge questo limite in un tempo finito, e essendo minore di 1.

16. Una data massa inelastica si lascia cadere da una data altezza sopra un guscio di una bilancia, e due masse inelastiche si fanno cadere da differenti altezze sull'altro guscio, in modo

che i tre urti abbiano luogo simultaneamente; trovare le relazioni tra le masse e le altezze affinchè la bilancia rimanga permanentemente in quiete.

17. Un elemento che si muove in una parabola intorno ad un centro di forza nel fuoco, colpisce un piano duro in un punto qualunque della sua traiettoria. Se esso descrive una parabola dopo dell'urto, trovare la direzione del suo asse.

18. OA, OB sono verghe nello stesso piano verticale inclinate sotto gli angoli α, β all'orizzonte. Se un elemento, pel quale $e=1$, proiettato da A, colpisce B e continua a rimbalzare tra A e B, allora essendo T il tempo della corsa, γ l'inclinazione di AB all'orizzonte,

$$\tan\gamma = \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\alpha),$$

e
$$T^2 = \frac{2c}{g} \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\sqrt{\{4\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)\}}}.$$

19. Elementi eguali girano in direzioni opposte intorno al fuoco in un'ellisse di eccentricità $\frac{3}{5}$, e si urtano nell'apside più vicino. Trovare le distanze degli urti seguenti, e mostrare che se p è la distanza apsidale primitiva, gli elementi cadono nel centro dopo il tempo

$$\frac{\pi}{14}\frac{(5p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2\mu)}}.$$

20. Due elementi eguali, connessi da un filo che passa liberamente per il polo, sono costretti a muoversi nella stessa spirale logaritmica. Se essi sono da principio in quiete ed uno è proiettato con data velocità (in modo da accrescere la sua distanza dal polo) determinare l'urto.

21. Tre palle (supposte infinitamente piccole), per le quali $e=1$, sono situate ai vertici di un triangolo. Trovare le relazioni tra le masse affinchè la sfera A se spinta a colpire B, sia riflessa a C e da C alla sua posizione iniziale. Gli urti si suppongono aver luogo in ciascun vertice in modo che la linea che congiunge i centri delle sfere sia perpendicolare al lato opposto del triangolo; α, β, γ, essendo gli angoli del triangolo, troviamo

$$\frac{A}{B} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha-\gamma)}, \quad \frac{A}{C} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}.$$

22. Se un razzo, originalmente di massa M, getta via ad ogni

unità di tempo una massa eM con velocità relativa V, e se M' è la massa della scatola, etc. mostrare che esso non può innalzarsi immediatamente a meno che $Ve > g$, nè del tutto a meno che $\frac{MVe}{M'} > g$. Se esso s'innalza subito verticalmente, mostrare che la sua massima velocità è

$$V \log \frac{M}{M'} - \frac{g}{e}\left(1 - \frac{M'}{M}\right),$$

e la massima altezza cui esso giunge è

$$\frac{V^2}{2g}\left(\log \frac{M}{M'}\right)^2 + \frac{V}{e}\left(1 - \frac{M'}{M} - \log \frac{M}{M'}\right).$$

23. Se un numero infinito di punti materiali perfettamente elastici, egualmente distribuiti in una sfera vuota, sono messi in moto ciascuno con una velocità qualunque, mostrare che la continua pressione risultante (riferita ad una unità di area) sulla superficie interna è eguale ai due terzi dell'energia cinetica degli elementi divisa pel volume della sfera.

24. Una cometa nel muoversi da un punto ad un altro, getta via ad ogni istante piccole porzioni della sua massa che serbano sempre lo stesso rapporto n alla massa rimanente. Se v è la velocità con la quale ciascun elemento è gettato via, α l'inclinazione della sua direzione al raggio vettore, dimostrare che il periodo t sarà diminuito di

$$\frac{3nvt}{fa}\left\{(\varphi' - \varphi)\sqrt{(ap)}\,\mathrm{sen}\,\alpha - (r' - r)\cos\alpha\right\},$$

φ e φ' essendo le anomalie eccentriche, r ed r' le distanze focali nei punti dati, a la distanza media, $2p$ il lato retto, ed f la forza alla distanza a.

25. Una palla di relativa elasticità e colpisce un'altra palla eguale in riposo; mostrare che il massimo angolo possibile tra le direzioni, prima e dopo dell'urto, della prima palla è

$$\tan^{-1} \frac{1 + e}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - e}},$$

e che in quel caso l'inclinazione della linea dei centri alla direzione primitiva della palla urtante è

$$\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - e}}{2}.$$

26. Un elemento perfettamente elastico è sospeso per mezzo di

un filo inestensibile senza peso da un punto nell'asse di un cilindro retto circolare verticale vuoto. L'elemento è tenuto in contatto col cilindro, ed è poi proiettato in modo che il filo sia sempre disteso. Dimostrare che le porzioni delle sue traiettorie tra due urti consecutivi sono simili.

27. Elementi in numero $(2n-1)$, connessi da fili inestensibili, sono sospesi da due punti fissi in un piano orizzontale in modo da pendere simmetricamente, i loro pesi essendo tali che l'inclinazione di ciascun filo a quello immediatamente al di sotto sia α, che è anche l'inclinazione di ciascuno dei due fili più bassi all'orizzonte. Trovare i loro pesi; e mostrare che se il più basso di cui la massa è m è percosso da un colpo verticale P, la componente orizzontale della velocità iniziale di ogni elemento varia inversamente come il suo peso, e la componente verticale della velocità iniziale dell'r^{mo} contando dal più basso è

$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha}{2m \cos^2 \alpha} \{(2n - 2r - 1) \operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \alpha \cot n\alpha - \operatorname{sen} (2r + 1) \alpha\}.$$

28. Un elemento di elasticità e è legato con un filo elastico di naturale lunghezza a ad un punto nell'intersezione di due piani levigati, l'uno verticale e l'altro orizzontale, sul secondo dei quali esso si muove. Esso è stirato sino ad una lunghezza qualunque, e poi è lasciato andare. Se b_1, b_2, b_3, etc. sono le massime lunghezze del filo, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, etc. gli angoli secondo i quali esso è inclinato al piano verticale dopo i successivi urti, dimostrare che

$$(b_n - a) \cos \theta_n$$

è lo stesso per tutt'i valori di n.

29. Un filo uniforme e perfettamente flessibile giace in una catenaria su di un piano orizzontale levigato, e l'elemento nel punto più basso è subitaneamente proiettato verso la direttrice con una data velocità; mostrare che la tensione impulsiva in ogni punto varia come l'ordinata di quel punto, e che ogni punto del filo incomincia a muoversi nella stessa direzione.

30. Una catena flessibile giace sopra un piano orizzontale levigato nella forma di una porzione di una catenaria comune, le tangenti nelle estremità facendo gli angoli θ_1, θ_2 con la tangente nel vertice della catenaria. Una tensione impulsiva T_1 è applicata alla prima estremità; mostrare che la tensione impulsiva in un punto della catena dove la tangente fa un angolo θ con la tangente nel vertice è eguale a

$$T_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} \quad \frac{\theta - \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}.$$

CAPITOLO XI.

Moto Perturbato.

298. Nell'investigazione del moto di un elemento assoggettato all'azione di forze perturbatrici, possiamo, quando queste sono molto piccole in paragone delle forze sotto le quali l'orbita non perturbata è descritta, supporre che in ogni istante l'orbita attuale sia della stessa *natura* della non perturbata, ma che la sua grandezza, la forma e la posizione siano leggermente diverse. Con questo mezzo la considerazione del moto in un'orbita di cui l'equazione non si può trovare, o se trovata sarebbe di estrema complicazione, si riduce ai casi considerati nei Capitoli precedenti, il solo procedimento addizionale essendo la determinazione dei cambiamenti degli elementi o *Parametri* dell'orbita, dovuti alle forze perturbatrici; questi parametri essendo resi così funzioni esplicite del tempo. L'uso principale di questo metodo è nella teoria planetaria, ed ivi gli elementi dell'*Orbita istantanea* non si possono determinare che per approssimazione, la quale con questo metodo possiamo nel modo migliore effettuare.

Non è necessario che l'*orbita* sia cambiata dalla forza perturbatrice, affinchè il metodo dei parametri sia applicabile; supponiamo per esempio che un elemento sia costretto a muoversi in una curva data; l'estensione delle sue oscillazioni, e la velocità con la quale esso giunge ad un punto particolare nella traiettoria, per esempio, sono parametri, ed in termini di questi il movimento si può esprimere. Questo metodo è perciò applicabile ad ogni caso di moto libero o no, sempre supponendo che le forze perturbatrici siano piccole; la sola differenza essendo che nel moto non libero vi sono meno parametri di cui si debba trovare la variazione.

299. Il principio generale del metodo si può spiegare come segue.

Siano

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + X' \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y' \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z'\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)},$$

le equazioni del moto di un elemento di cui le coordinate al tempo

t sono x, y, z; e supponiamo, inoltre, che X', Y', Z' siano le somme delle parti risolute delle forze perturbatrici parallele agli assi. Se non vi fossero forze perturbatrici, avremmo le equazioni del moto

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z \end{aligned}\right\} \qquad (2).$$

Ora la soluzione delle equazioni (2) sia

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi\,(t, a_1, a_2, \dots a_6) \\ y &= \chi\,(t, a_1, a_2, \dots a_6) \\ z &= \psi\,(t, a_1, a_2, \dots a_6) \end{aligned}\right\} \qquad (3),$$

che racchiudono sei costanti arbitrarie; e le forme delle funzioni φ, χ, ψ, essendo conosciute.

Osserviamo di passaggio che, se il movimento non fosse libero, avremmo di più una a due relazioni tra, x, y e z, che conducono ad altre tra i loro coefficienti differenziali, sicchè il *numero* delle costanti arbitrarie sarebbe ridotto.

Ora supponiamo che le soluzioni di (1) siano della stessa forma delle espressioni in (3), $a_1, a_2, \dots a_6$ non essendo più costanti ma funzioni di t da determinarsi.

Il fatto di (3) che debbono soddisfare (1), ci dà le tre inevitabili equazioni seguenti per la determinazione di questi parametri,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= X + X', \\ \frac{d^2\chi}{dt^2} &= Y + Y', \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= Z + Z' \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

300. Siamo allora in libertà di fare tre ipotesi addizionali qualunque riguardo a quelli che ci piace. Le più convenienti sono quelle somministrate dalla condizione che non solamente le espressioni per le coordinate dell'elemento, ma anche le espressioni per le parti risolute della velocità parallelamente agli assi

coordinati, siano della stessa *forma* nell'orbita perturbata come nella non perturbata.

Ora nell'orbita perturbata,

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)+\left(\frac{d\varphi}{da_1}\right)\frac{da_1}{dt}+\left(\frac{d\varphi}{da_2}\right)\frac{da_2}{dt}+\ldots+\left(\frac{d\varphi}{da_6}\right)\frac{da_6}{dt},$$

con simili espressioni per $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$, le parentesi essendo adoperate per esprimere differenziazione *parziale*.

Ma nell'orbita non perturbata

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right);$$

e similmente per $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$.

Questo dà le tre relazioni addizionali necessarie tra a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e t, nella forma

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\varphi}{da_1}\right)\frac{da_1}{dt}+\left(\frac{d\varphi}{da_2}\right)\frac{da_2}{dt}+\ldots+\left(\frac{d\varphi}{da_6}\right)\frac{da_6}{dt}=0\\ \left(\frac{d\chi}{da_1}\right)\frac{da_1}{dt}+\left(\frac{d\chi}{da_2}\right)\frac{da_2}{dt}+\ldots+\left(\frac{d\chi}{da_6}\right)\frac{da_6}{dt}=0\\ \left(\frac{d\psi}{da_1}\right)\frac{da_1}{dt}+\left(\frac{d\psi}{da_2}\right)\frac{da_2}{dt}+\ldots+\left(\frac{d\psi}{da_6}\right)\frac{da_6}{dt}=0\end{aligned}\right\}\ldots(5).$$

E prendendo queste in considerazione del pari che le equazioni (2), (3), le equazioni (4) diventano

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{da_1}\right)\frac{da_1}{dt}+\left(\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{da_2}\right)\frac{da_2}{dt}+\ldots+\left(\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{da_6}\right)\frac{da_6}{dt}=X'\\ \left(\frac{d\left(\frac{d\chi}{dt}\right)}{da_1}\right)\frac{da_1}{dt}+\left(\frac{d\left(\frac{d\chi}{dt}\right)}{da_2}\right)\frac{da_2}{dt}+\ldots+\left(\frac{d\left(\frac{d\chi}{dt}\right)}{da_6}\right)\frac{da_6}{dt}=Y'\\ \left(\frac{d\left(\frac{d\psi}{dt}\right)}{da_1}\right)\frac{da_1}{dt}+\left(\frac{d\left(\frac{d\psi}{dt}\right)}{da_2}\right)\frac{da_2}{dt}+\ldots+\left(\frac{d\left(\frac{d\psi}{dt}\right)}{da_6}\right)\frac{da_6}{dt}=Z'\end{aligned}\right\}(6).$$

Le equazioni (5) e (6) bastano per determinare i sei parametri in termini di t; e si può osservare che, se alcune di queste quan-

tità stesse apparissero nei coefficienti di queste equazioni differenziali, esse si possono trattare come costanti, poichè le loro variazioni si possono trascurare per un breve tempo in ogni periodo del moto, in considerazione della piccolezza delle forze perturbatrici. Questo evidentemente corrisponde analiticamente a trascurare le potenze delle forze perturbatrici superiori alla prima.

301. Supponendo quindi i parametri trovati come funzioni di t, se nelle equazioni (3) sostituiamo i loro valori, ed indi eliminiamo t dalle tre equazioni, avremo due equazioni risultanti che saranno le equazioni dell' orbita *attualmente* descritta dall' elemento.

Ma se si elimina t, $a_1, a_2, \ldots a_6$ essendo considerate costanti, e *poi* si sostituiscono i valori di $a_1, a_2, \ldots a_6$ come funzioni di t, le due equazioni risultanti rappresenteranno, per ogni valore particolare t' dato a t, una curva che evidentemente coincide con la traiettoria attuale al tempo t', e che *sarebbe* da quell' istante la traiettoria attuale se le forze perturbatrici cessassero allora. Questa curva si chiama *l' orbita istantanea* al tempo $t = t'$, e la sua forma e la posizione debbono evidentemente sopportare un leggiero cambiamento in conseguenza della forza perturbatrice.

302. Se le costanti sono meno di sei, come nel caso del moto non libero, altrettante equazioni come quelle ora indicate non saranno necessarie; ma lo schizzo precedente ci abiliterà ad applicare il metodo ad ognuno di questi casi. Così se l' elemento è costretto a muoversi sopra una data superficie, prendendo la sua equazione insieme con le equazioni (3), vi saranno evidentemente due delle sei costanti determinate subito completamente in termini delle altre. E se il moto è sopra una data curva, da quattro delle sei costanti saremo liberati. In quel caso, essendo s la lunghezza dell' arco descritto al tempo t, S la forza tangenziale, S' la forza tangenziale perturbatrice, l' equazione del moto secondo la tangente è

$$\frac{d^2s}{dt^2} = S + S' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Ora se

$$s = \varphi(a, \alpha, t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

è la soluzione di

$$\frac{d^2s}{dt^2} = S,$$

otterremo i valori di a, α in termini di t, affinchè (8) soddisfi (7)

ed anche le espressioni per le velocità nell'orbita istantanea e nell'orbita reale siano le stesse, risolvendo le equazioni

$$\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dt}+\left(\frac{d\varphi}{da}\right)\frac{da}{dt}=0\ ,$$

$$\left(\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dt}+\left(\frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{da}\right)\frac{da}{dt}=S'.$$

Queste equazioni evidentemente corrispondono a quelle dei gruppi (5) e (6) rispettivamente.

303. *Determinare l'effetto di una piccola forza perturbatrice sopra un pendolo semplice cicloidale.*

Se s è la distanza in arco dell'elemento dal punto più basso al tempo t, ponendo

$$\frac{g}{4a}=n^2,$$

abbiamo, (Art. 168), $\frac{d^2s}{dt^2}+n^2s=0,$

per equazione del moto non perturbato. La sua soluzione è

$$s=a\operatorname{sen}(nt+b),$$

dove a e b sono quantità costanti arbitrarie dipendenti dalla lunghezza dell'arco di vibrazione e dal tempo del passaggio pel punto più basso.

La velocità al tempo t è $\frac{ds}{dt}=na\cos(nt+b)$.

Supporremo ora che f sia una piccola forza perturbatrice tangenziale: l'equazione del moto è

$$\frac{d^2s}{dt^2}+n^2s=f.$$

Supponiamo che la soluzione di questa equazione sia

$$s=a\operatorname{sen}(nt+b),$$

a e b essendo considerate funzioni ignote di t, che si debbono ora determinare.

Prendendo come una condizione, che la forma dell'espressione per la velocità debba essere ancora la stessa; poichè

$$\frac{ds}{dt}=na\cos(nt+b)+\frac{da}{dt}\operatorname{sen}(nt+b)+a\cos(nt+b)\frac{db}{dt},$$

abbiamo $$\frac{da}{dt}\operatorname{sen}(nt+b)+a\cos(nt+b)\frac{db}{dt}=0\ ,$$

che è la relazione *supposta* tra a e b.

Ancora, poichè $\frac{ds}{dt}=na\cos(nt+b)$,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-n^2a\operatorname{sen}(nt+b)+n\frac{da}{dt}\cos(nt+b)-na\operatorname{sen}(nt+b)\frac{db}{dt}.$$

In questa sostituiamo per $\frac{d^2s}{dt^2}$ il suo valore dall'equazione del moto, ed abbiamo

$$n\frac{da}{dt}\cos(nt+b)-na\operatorname{sen}(nt+b)\frac{db}{dt}=f,$$

che è la seconda equazione che lega a e b con t.

Eliminando successivamente $\frac{db}{dt}$ e $\frac{da}{dt}$ da queste, abbiamo

$$\frac{da}{dt}=\frac{f}{n}\cos(nt+b)\ ,\qquad \frac{db}{dt}=-\frac{f}{na}\operatorname{sen}(nt+b).$$

Se potessimo risolvere queste equazioni esattamente avremmo la determinazione completa del moto. In pochi casi ciò è praticabile: dovunque avremo da applicare la ricerca un'approssimazione è sufficiente.

Supponiamo che f sia una molto piccola forza. Quindi le parti variabili di a e b sono dello stesso ordine di grandezza di f, e possono essere trascurate nei secondi membri delle suddette equazioni se conveniamo di trascurare il quadrato e le potenze superiori di f.

Per trovare l'alterazione nell'estensione della vibrazione che ha luogo in una oscillazione dobbiamo integrare $\frac{f}{n}\cos(nt+b)\,dt$ tra i limiti di t corrispondenti ad una oscillazione; cioè, da un valore di t che dà $nt+b=\alpha$ al valore di t che dà $nt+b=\pi+\alpha$. Qui α può essere una quantità qualunque: in diversi casi troveremo conveniente di integrare tra limiti diversi.

Quindi, *l' accrescimento dell' arco della semi-vibrazione* $=\frac{1}{n}\int f\cos(nt+b)dt$ tra i limiti sopra menzionati.

Per trovare l'alterazione nel tempo dell'oscillazione, siano

T, T' i valori di t in due successivi arrivi del pendolo nel punto più basso; B, B' i valori di b in questi tempi. Allora

$$nT + B = m\pi, \quad nT' + B' = (m+1)\pi;$$

onde
$$n(T' - T) + B' - B = \pi,$$

$$T' - T = \frac{\pi}{n} - \frac{1}{n}(B' - B).$$

Ora
$$B' - B = \int_T^{T'} \frac{db}{dt}\,dt = -\frac{1}{na}\int_T^{T'} f \operatorname{sen}(nt + b)\,dt:$$

quindi l'accrescimento del tempo dell'oscillazione

$$= \frac{1}{n^2 a}\int_T^{T'} f \operatorname{sen}(nt + b)\,dt,$$

ed *il proporzionato accrescimento del tempo dell'oscillazione*

$$= \frac{1}{\pi n a}\int_T^{T'} f \operatorname{sen}(nt + b)\,dt.$$

Se le circostanze sono tali da dover integrare per due vibrazioni, allora il proporzionato accrescimento del tempo dell'oscillazione

$$= \frac{1}{2\pi n a}\int f \operatorname{sen}(nt + b)\,dt.$$

304. Queste formole sono convenienti quando f si può esprimere in termini di t. Se però f è espresso in termini di s, come è il caso particolarmente negli scappamenti dell'orologio, dobbiamo modificare le formole: così

$$\frac{da}{ds} = \frac{da}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{1}{na\cos(nt + b)}\,\frac{da}{dt} = \frac{f}{n^2 a},$$

e
$$\frac{db}{ds} = \frac{1}{na\cos(nt + b)}\,\frac{db}{dt}$$

$$= -\frac{f}{n^2 a^2}\tan(nt + b) = -\frac{f}{n^2 a^2}\,\frac{s}{\sqrt{(a^2 - s^2)}}.$$

Quindi, *l'accrescimento dell'arco della semi-vibrazione è*

$$\frac{1}{n^2 a}\int_{-s}^{s} f\,ds,$$

il proporzionato accrescimento del tempo della vibrazione

$$= \frac{1}{\pi n^2 a^2} \int_{-s}^{s} \frac{fsds}{\sqrt{(a^2 - s^2)}}.$$

I limiti dovrebbero a rigore essere $-s$ ed s', dove s' differisce da s per una quantità che dipende dal cambiamento nell' arco di vibrazione: ma possiamo trascurare questa differenza tra s ed s', poichè i termini in cui essi si trovano sono piccoli.

305. *Invece di vibrare in una cicloide, vibri il pendolo in un circolo.*

Qui la forza $= g \operatorname{sen} \frac{s}{l} = \frac{gs}{l} - \frac{gs^3}{6l^3}$ prossimamente;

onde $$f = \frac{g}{6l^3} s^3 = \frac{ga^3}{6l^3} \operatorname{sen}^3 (nt + b);$$

quindi il proporzionato accrescimento nel tempo della vibrazione

$$= \frac{ga^2}{6\pi n l^3} \int \operatorname{sen}^4 (nt + b)\, dt.$$

Ora $$\int \operatorname{sen}^4 (nt+b) dt = \frac{1}{8} \int \{3 - 4 \cos 2 (nt+b) + \cos 4 (nt+b)\} dt$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ 3t - \frac{2}{n} \operatorname{sen} 2 (nt + b) + \frac{1}{4n} \operatorname{sen} 4 (nt + b) \right\} + C$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\pi}{n}, \text{ da } nt + b = 0 \text{ a } \pi;$$

quindi il proporzionato accrescimento del tempo

$$= \frac{ga^2}{16 n^2 l^3} = \frac{a^2}{16 l^2} \text{ poichè } n^2 = \frac{g}{l}.$$

L' accrescimento dell' arco di vibrazione

$$= \frac{ga^3}{6n l^3} \int \cos (nt + b) \operatorname{sen}^3 (nt + b)\, dt$$

$$= \frac{ga^3}{24 n^2 l^3} \operatorname{sen}^4 (nt + b) + C = 0 \text{ tra i limiti},$$

come avremmo potuto facilmente prevedere.

306. *Supponiamo che l' attrito nel punto di sospensione sia costante.*

Sarà conveniente di prendere gl' integrali durante quel tempo in cui l' attrito agisce nella stessa direzione: cioè, dal principio di una vibrazione sino alla sua fine, o da $nt+b=-\frac{1}{2}\pi$ ad $nt+b=\frac{1}{2}\pi$. Qui $f=-c$, poichè l' attrito *ritarda* il moto;

onde accrescimento dell' arco $= -\frac{c}{n}\int\cos(nt+b)\,dt$

$$= -\frac{c}{n^2}\,\mathrm{sen}\,(nt+b) + C = -\frac{2c}{n^2},$$

proporzionato accrescimento del tempo $= -\frac{c}{\pi na}\int \mathrm{sen}(nt+b)\,dt$

$$= \frac{c}{\pi n^2 a}\cos(nt+b) + C = 0, \text{ tra i limiti.}$$

307. *Supponiamo che la resistenza dell' aria produca una forza che varia come l' m^ma^ potenza della velocità o* $=kv^m$, m *essendo un numero intero qualunque.*

La velocità nel muoversi dal punto più basso

$$= na\cos(nt+b);\ \text{onde}\ f = -kn^m a^m \cos^m(nt+b);$$

quindi l' accrescimento dell' arco

$$= -kn^{m-1}a^m\int\cos^{m+1}(nt+b)\,dt\ \text{ da }\ nt+b=-\frac{1}{2}\pi\ \text{ ad }\ \frac{1}{2}\pi$$

$$= -k\pi n^{m-2}a^m\frac{m(m-2)\dots 1}{(m+1)(m-1)\dots 2}\ (m\ \text{dispari})$$

$$= -2kn^{m-2}a^m\frac{m(m-2)\dots 2}{(m+1)(m-1)\dots 3}\ (m\ \text{pari}).$$

Quando $m=2$ (la legge comunemente presa) la diminuzione dell' arco $=\frac{4}{3}ka^2$.

Il proporzionato accrescimento del tempo dell' oscillazione

$$= -\frac{k}{\pi}n^{m-1}a^{m-1}\int\cos^m(nt+b)\,\mathrm{sen}\,(nt+b)\,dt$$

$$= \frac{kn^{m-2}a^{m-1}}{\pi(m+1)}\cos^{m+1}(nt+b) + C = 0\ \text{ tra i limiti,}$$

sia m un intero positivo o una frazione.

308. *Supponiamo che la resistenza dell'aria sia espressa con una funzione qualunque della velocità.*

Qui $f=-\varphi(v)$ per il movimento nella direzione positiva: e l'accrescimento dell'arco di vibrazione

$$=\frac{1}{n^3a}\int \varphi(v)\frac{\cos(nt+b)}{\operatorname{sen}(nt+b)}dv=\frac{1}{n^3a}\int\frac{v\varphi(v)\,dv}{\sqrt{(n^2a^2-v^2)}}$$

da $v=0$ a $v=0$ di nuovo. Ma si deve osservare che da $v=0$ a $v=na$ (cioè, da $s=-a$ ad $s=0$) il radicale deve essere preso col segno negativo, perchè $\operatorname{sen}(nt+b)$ è allora negativo. L'accrescimento dell'arco è per conseguenza

$$=-\frac{1}{n^3a}\int_0^{na}\frac{v\varphi(v)\,dv}{\sqrt{(n^2a^2-v^2)}}+\frac{1}{n^3a}\int_{na}^0\frac{v\varphi(v)\,dv}{\sqrt{(n^2a^2-v^2)}},$$

e quindi vi è una diminuzione $=\frac{2}{n^3a}\int_0^{na}\frac{v\varphi(v)\,dv}{\sqrt{(n^2a^2-v^2)}}$.

Il proporzionato accrescimento del tempo della vibrazione

$$=-\frac{1}{\pi na}\int\varphi(v)\operatorname{sen}(nt+b)\,dt=\frac{1}{\pi n^3a^2}\int\varphi(v)\,dv$$

$$=\frac{1}{\pi n^3a^2}\psi(v)=0 \text{ da } v=0 \text{ a } v=0.$$

Quindi una resistenza che è costante, o che dipende dalla velocità non altera il tempo della vibrazione.

309. *Sia la resistenza quella prodotta da una corrente di aria che si muove nel piano di vibrazione con una velocità* V *maggiore della massima velocità del pendolo: e che varia come il quadrato della loro velocità relativa.*

Qui $f=\varphi(v)=k(V-v)^2$ quando il pendolo si muove nella direzione della corrente, che supponiamo essere la direzione *positiva* di s; ed $f=\varphi(v)=k(V+v)^2$ quando esso si muove nella direzione opposta.

Per la formola nell'ultimo Esempio, quando il pendolo si muove nella direzione della corrente, l'arco si accresce di

$$k\left(\frac{2V^2}{n^2}-\frac{Va\pi}{n}+\frac{4a^2}{3}\right),$$

e quando esso ritorna l'arco diminuisce di

$$k\left(\frac{2V^2}{n^2}+\frac{Va\pi}{n}+\frac{4a^2}{3}\right).$$

La diminuzione nelle due vibrazioni $= \dfrac{2kVa\pi}{n}$. Il tempo è inalterato.

310. *Una forza* F *agisca per uno spazio molto piccolo* x *alla distanza* c *dal punto più basso.*

L'accrescimento dell'arco $= \dfrac{1}{n^2 a}\int_c^{c+x} F ds = \dfrac{Fx}{n^2 a}$ prossimamente.

Il proporzionato accrescimento del tempo della vibrazione

$$= \frac{1}{\pi n^2 a^2}\int_c^{c+x} \frac{Fsds}{\sqrt{(a^2 - s^2)}}.$$

Se il valore generale dell'integrale è $\varphi(c)$, allora il proporzionato accrescimento del tempo

$$= \varphi(c + x) - \varphi(c) = \varphi'(c)x$$

$$= \frac{Fx}{\pi n^2 a^2} \frac{c}{\sqrt{(a^2 - c^2)}}.$$

Se quindi è dato un impulso quando il pendolo è al suo punto più basso, $c=0$ ed il tempo della vibrazione è inalterato.

311. *Determinare il moto di un proiettile in un mezzo uniforme la resistenza essendo come il quadrato della velocità.*

Qui come sopra (Art. 219),

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -kv^2\frac{dx}{ds} = -k\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g' - kv^2\frac{dy}{ds} = -g' - k\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (1).$$

Ora se $k=0$, abbiamo evidentemente

$$\left.\begin{aligned} x &= a + mt \\ y &= b + nt - \frac{1}{2}g't^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2),$$

in cui a, b sono le coordinate del punto di proiezione, ed m, n le velocità iniziali orizzontale e verticale.

Ora supponendo che (2) sia la soluzione di (1), a, b, m ed n

essendo ora funzioni di t, abbiamo

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt}=m,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=n-g't,\end{array}\right\}$$

in tutte e due le orbite; quindi

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{da}{dt}+t\dfrac{dm}{dt}=0\\[2ex]\dfrac{db}{dt}+t\dfrac{dn}{dt}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Inoltre $$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\{m^2+(n-g't)^2\}},$$

e le equazioni (1) diventano

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dm}{dt}=-km\sqrt{\{m^2+(n-g't)^2\}},\\[2ex]\dfrac{d^2y}{dt^2}+g'=\dfrac{dn}{dt}=-k(n-g't)\sqrt{\{m^2+(n-g't)^2\}}\end{array}\right\}. (4);$$

e (3) diviene

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{da}{dt}=kmt\sqrt{\{m^2+(n-g't)^2\}}\\[2ex]\dfrac{db}{dt}=k(n-g't)\,t\sqrt{\{m^2+(n-g't)^2\}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (5).$$

Le ultime quattro equazioni bastano per determinare a,b,m,n in termini di t, e quindi l'orbita istantanea. Per una prima approssimazione, possiamo a motivo dell'osservazione nell'Art. 300 integrare queste equazioni nella supposizione che il secondo membro di ciascuna sia variabile solamente in quanto esso contiene esplicitamente t.

Ora le equazioni (2) mostrano che il lato retto della parabola istantanea è $\dfrac{2m^2}{g'}$; e siccome $\dfrac{dm}{dt}$ è negativo, per (4), vediamo che il lato retto diminuisce continuamente.

Inoltre dalle equazioni (2),

$$\left(x-a-\frac{mn}{g'}\right)^2=-\frac{2m^2}{g'}\left(y-b-\frac{n^2}{2g'}\right).$$

Questo dà per le coordinate del fuoco dell'orbita istantanea

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + \frac{mn}{g'} \\ y' &= b + \frac{n^2 - m^2}{2g'} \end{aligned}\right\}$$

Se si differenziano queste espressioni e si eliminano $\frac{da}{dt}$, etc. per mezzo di (4) e (5), si vedrà che $\frac{dx'}{dt}$ è negativo, o sia l'asse dell'orbita istantanea si muove indietro, finchè l'elemento giunge al vertice; dopo di che esso si avanza pel resto del moto; inoltre che $\frac{dy'}{dt}$ è positivo se $m>n$, cioè, il fuoco dell'orbita istantanea si muove in su mentre la direzione del moto dell'elemento fa con l'orizzonte un angolo minore di 45°, cioè mentre l'elemento è al di sopra del lato retto dell'orbita istantanea.

312. *Un elemento, che si muove intorno ad un centro di forza di cui l'intensità è inversamente come il quadrato della distanza, è soggetto ad una piccola forza perturbatrice nel suo piano del movimento; investigare il cambiamento nella forma e nella posizione dell'orbita.*

Si risolva la forza perturbatrice in due, φ e ψ, l'una secondo il raggio vettore e l'altra perpendicolare ad esso; le equazion del moto sono

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= -\frac{\mu}{r^2} + \varphi \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) &= \psi \end{aligned}\right\} \text{............ (1).}$$

Ora le soluzioni di queste equazioni sono

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{\mu}{h^2}\{1 + e\cos(\theta - \varpi)\} \\ r^2\frac{d\theta}{dt} &= h \end{aligned}\right\} \text{........... (2),}$$

se omettiamo le forze φ e ψ. Quando consideriamo il loro effetto, allora le quantità h, e e ϖ si debbono considerare variabili.

Ma nell'orbita istantanea la velocità e la direzione del moto

sono le stesse come nell'orbita attuale, e quindi se si differenzia (2), considerando h, e, e ϖ variabili, i risultati per r, $\frac{dr}{dt}$, e $\frac{d\theta}{dt}$ debbono essere della stessa forma come se le forze perturbatrici non avessero agito. Questo ci abiliterà ad evitare i secondi coefficienti differenziali di h, e e ϖ; e la sostituzione dei loro valori per $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$, e $\frac{d\theta}{dt}$ in (1), ci darà tre equazioni per

$$\frac{dh}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{d\varpi}{dt}.$$

Le espressioni di queste quantità sono complicate e così non le diamo. Esse si troveranno più facilmente nei casi particolari, quando sono date φ e ψ.

Nel caso che l'orbita è un'ellisse, $h^2 = \mu a(1-e^2)$, sicchè abbiamo con la sostituzione

$$\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}, \text{ e } \frac{d\varpi}{dt}.$$

Ed il secondo integrale della seconda delle equazioni (1) contiene ε o l'epoca, la quale ancora si troverà così come una funzione di t.

313. Se vogliamo il cambiamento prodotto nella forma e nella posizione di un'orbita da un leggiero cambiamento fatto nella velocità, o nella direzione del moto, etc. in qualche punto particolare, dobbiamo esprimere separatamente ciascuno degli elementi dell'orbita in termini della quantità da mutarsi; allora prendendo i differenziali dei due membri, abbiamo il richiesto cambiamento di valore.

Così, abbiamo generalmente in un'orbita ellittica

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \text{ Art. 137 (9).}$$

Nell'estremità dell'asse maggiore più lontana dal fuoco questa diviene

$$V^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}.$$

Ora se in questo punto V si fa $V+\delta V$, senza cambiamento di direzione, abbiamo la condizione che nella nuova orbita $a(1+e)$ dovrà avere lo stesso valore come nell'antica; poichè questa sarà sempre la distanza apsidale.

Quindi $$\delta(V^2) = \delta\left(\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}\right),$$

e $$\delta\{a(1+e)\} = 0;$$

onde $$2V\delta V = -\frac{\mu}{a}\frac{\delta e}{1+e},$$

o $$\delta e = -2\sqrt{\left\{\frac{a}{\mu}(1-e^2)\right\}}\,\delta V.$$

E $$\delta a = -\frac{a}{1+e}\,\delta e$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{a^3}{\mu}\frac{1-e}{1+e}\right)}\,\delta V,$$

che determina l'accrescimento dell'asse maggiore e la diminuzione dell'eccentricità, e lo stesso metodo è applicabile a casi più complicati.

Ancora, nel caso di un'orbita parabolica, come nel Cap. IV, è facile vedere che un cambiamento nella grandezza della velocità sposta il fuoco nella linea che lo congiunge col punto di proiezione per uno spazio

$$\frac{V\delta V}{g},$$

innalza la direttrice per uno spazio eguale, ed accresce il lato retto di

$$\frac{4V\delta V}{g}\cos^2\alpha,$$

dove α è l'inclinazione della traiettoria all'orizzonte nell'istante dell'urto.

Se si cambia solamente la *direzione* del moto, la direttrice è inalterata, il fuoco si muove in una direzione perpendicolare alla linea che lo congiunge col punto di proiezione, ed il lato retto è diminuito della quantità

$$-\frac{4V^2}{g}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\delta\alpha.$$

Nell'ultimo caso la nuova orbita ancora interseca l'antica, e le tangenti all'una ed all'altra nei due punti d'intersezione sono ad angoli retti tra loro; finchè lo spostamento $\delta\alpha$ è infinitamente piccolo.

Questi risultati si possono estendere facilmente, come nel Cap. IV, deducendoli con la differenziazione dai risultati analitici ivi ottenuti.

ESEMPII.

1. Se una piccola velocità $n\frac{\mu e}{4}$ è impressa ad un pianeta, nella direzione del raggio vettore, mostrare che

$$\delta e = ne \operatorname{sen}(\theta - \varpi),$$

$$\delta\varpi = -n\cos(\theta - \varpi).$$

2. Un satellite si muove intorno ad un pianeta sferico nel piano del suo equatore, ed in un'orbita leggermente ellittica. Trovare il moto dell'apside dovuto ad un uniforme giogo montuoso all'equatore.

3. La forza centrale variando come la distanza, la velocità di un elemento è accresciuta di $\frac{1}{n}^{mo}$ quando esso si trova all'estremità di uno dei diametri coniugati eguali della sua orbita. Mostrare che ciascun asse è accresciuto di $\frac{1}{2n}^{mo}$, e che l'apside retrocede per un angolo

$$\frac{1}{n}\frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

4. In qual punto di un'orbita ellittica descritta intorno al fuoco, si può fare un piccolo cambiamento nella direzione del moto senza alterare la posizione dell'apside?

Se $\delta\varphi$ è questo cambiamento, mostrare che (nel caso supposto)

$$\delta\varphi = \frac{\delta e}{1 - e^2}.$$

5. Mostrare che in un'orbita ellittica intorno al fuoco, se la velocità si accresce di $\frac{1}{n}^{mo}$ quando l'anomalia vera è $\theta - \varpi$; avremo

$$\delta\varpi = \pm\frac{nr\operatorname{sen}(\theta - \varpi)}{ae},$$

secondo che l'elemento si muove verso l'apside più vicino o in senso opposto.

6. Un elemento che si muove intorno ad un centro di forza nel fuoco, in un' ellisse di piccola eccentricità, riceve un piccolo impulso perpendicolare alla sua direzione del moto ad un istante qualunque. Trovare l' effetto nella posizione dell' apside.

7. Ancora, se all' estremità dell' asse minore la velocità si accresce di $\frac{1}{n}^{mo}$, e la direzione si cambia in modo che h rimanga lo stesso, trovare l' alterazione nella forma e nella posizione dell' orbita.

$$\delta a = 2 \left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \delta V$$

$$\delta e = \left(\frac{a}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e} - e\right) \delta V.$$

8. Il primo termine della forza perturbatrice centrale sulla luna è $-m^2 r$, dove la forza centrale è $\frac{\mu}{r^2}$; mostrare che l' angolo apsidale (l' orbita essendo prossimamente circolare) è

$$\pi \left(1 + \frac{3}{2} \frac{m^2}{n^2}\right) \text{ prossimamente,}$$

dove $\frac{2\pi}{n}$ è un mese lunare medio.

9. Un elemento si muove in un circolo intorno ad un centro di forza come $(\text{Dist.})^{-2}$. La forza assoluta del centro cresce leggermente ed uniformemente. Determinare gli elementi approssimati dell' orbita dopo un dato tempo.

10. Un elemento si muove in un' orbita ellittica focale in un mezzo molto rado di cui la resistenza è come il quadrato della velocità; determinare l' effetto della resistenza sul tempo periodico.

11. Un elemento è proiettato lungo un piano inclinato leggermente scabro; trovare la traiettoria approssimata, e la velocità in ogni punto.

12. Un punto descrive un circolo, l' accelerazione tendendo al centro e variando inversamente come il quadrato della distanza: se la velocità in un punto qualunque è accresciuto nel rapporto di $\sqrt{3}$ a $\sqrt{2}$, trovare l' eccentricità della nuova orbita.

13. Una nube sferica di piccole masse, la di cui attrazione scambievole è insensibile, e di cui le velocità sono molto piccole,

entra nella sfera d'azione del sole in modo da essere incorporata nel sistema solare. In qual modo si altererà la forma della nube mentre essa segue la sua approssimativamente parabolica orbita?

14. Un elemento che gira intorno ad un centro fisso al quale è attratto da una forza che varia inversamente come il quadrato della distanza è sollecitato da una piccola forza perturbatrice f nella direzione del raggio vettore: dimostrare che le variazioni dell'asse maggiore, dell'eccentricità e dell'inclinazione della linea degli apsidi sono determinate dalle equazioni

$$\frac{da}{dt} = 2e\left\{\frac{a^3}{\mu(1-e^2)}\right\}^{\frac{1}{2}} f\cos(\theta-\omega),$$

$$\frac{de}{dt} = \left\{\frac{a(1-e^2)}{\mu}\right\}^{\frac{1}{2}} f\,\mathrm{sen}(\theta-\omega),$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{1}{e}\left\{\frac{a(1-e^2)}{\mu}\right\}^{\frac{1}{2}} f\cos(\theta-\omega).$$

15. Il ciondolo di un pendolo semplice di lunghezza l è sollecitato da una forza orizzontale $=pg\cos nt$, dove p è un numero grande, ed ln^2 è grande in paragone di g: mostrare che il pendolo può oscillare intorno a ciascuno dei due punti alla distanza α dal punto più basso con un' amplitudine β dove

$$\cos\alpha = 2\frac{ln^2}{gp^2}, \qquad \beta = \frac{2}{p}.$$

CAPITOLO XII.

Moto di due o più elementi.

314. Avendo considerato in dettaglio i varii casi che possono darsi nel moto di un solo elemento assoggettato all'azione di forze qualunque, ed il di cui moto è libero, costretto, o con resistenza, passiamo all'investigazione di alcuni casi molto semplici in cui si considerano più elementi. Questi casi si divideranno naturalmente in due serie; prima, quando gli elementi sono interamente liberi, e sono soggetti alle loro attrazioni scambievoli come anche ad altre forze comuni impresse: ed in secondo luogo, quando vi sono inoltre delle forze che costringono il moto; tali come quando due o più degli elementi sono connessi per mezzo di fili inestensibili, etc. Consideriamo questi casi ordinatamente:

I. *Moto libero.*

315. Una immediata applicazione della terza legge del moto mostra che se due elementi si attraggono scambievolmente, essi esercitano l'uno sull'altro forze eguali ed opposte, nella direzione della linea che li congiunge.

Se quindi m, m', sono le masse degli elementi, e la forza tra due unità di materia alla distanza D è $\varphi'(D)$, la forza comune è

$$m m' \varphi'(D).$$

316. *Un sistema di elementi liberi non è assoggettato ad altre forze che alle loro attrazioni scambievoli; investigare il moto del sistema.*

Siano, al tempo t, x_n, y_n, z_n le coordinate dell'elemento di cui la massa è m_n, e sia $\varphi'(D)$ la legge di attrazione. Esprima ${}_pr_q$ la distanza tra gli elementi m_p ed m_q; allora abbiamo per il movimento di m_1,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma \left\{ m_1 m_n \varphi'({}_1r_n) \frac{x_n - x_1}{{}_1r_n} \right\} \dots\dots\dots\dots (1),$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma \left\{ m_1 m_n \varphi'({}_1r_n) \frac{y_n - y_1}{{}_1r_n} \right\} \dots\dots\dots\dots (2),$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma \left\{ m_1 m_n \varphi'({}_1r_n) \frac{z_n - z_1}{{}_1r_n} \right\} \dots\dots\dots\dots (3),$$

con simili equazioni per ciascuno degli altri; le somme essendo

prese per tutto il sistema. Prima di fare alcun tentativo per la soluzione di queste equazioni, dobbiamo conoscere il loro numero, e le leggi di attrazione tra le diverse coppie di elementi. Ma alcuni teoremi generali, indipendenti da questi dati, si possono facilmente ottenere: sebbene non così semplicemente come nel Cap. II.

317. I. CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO. Nell'espressione di $m_p \frac{d^2 x_p}{dt^2}$, abbiamo un termine

$$m_p m_q \varphi'({}_p r_q) \frac{x_q - x_p}{{}_p r_q},$$

ed in $m_q \frac{d^2 x_q}{dt^2}$ abbiamo

$$m_q m_p \varphi'({}_q r_p) \frac{x_p - x_q}{{}_q r_p}.$$

Quindi se sommiamo insieme tutte le equazioni della forma (1) il risultato sarà

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \ldots = 0;$$

ó

$$\Sigma\left(m \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = 0,$$

Similmente

$$\Sigma\left(m \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(m \frac{d^2 z}{dt^2}\right) = 0.$$

Ora se x', y', z', sono al tempo t le coordinate del centro d'inerzia di tutti gli elementi, Art. 52,

$$x' \Sigma m = \Sigma(mx),$$

$$y' \Sigma m = \Sigma(my),$$

$$z' \Sigma m = \Sigma(mz).$$

E le equazioni precedenti si possono scrivere,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x'}{dt^2}\Sigma m=0\\ \frac{d^2y'}{dt^2}\Sigma m=0\\ \frac{d^2z'}{dt^2}\Sigma m=0\end{aligned}\right\} \quad \text{o} \quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2x'}{dt^2}=0,\\ \frac{d^4y'}{dt^2}=0,\\ \frac{d^2z'}{dt^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Onde

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx'}{dt}=a\\ \frac{dy'}{dt}=b\\ \frac{dz'}{dt}=c\end{aligned}\right\}.$$

Queste equazioni mostrano che la velocità del centro d'inerzia parallela a ciascuno degli assi coordinati rimane invariabile durante il moto, cioè, che *il centro d'inerzia del sistema rimane in quiete, o si muove uniformemente in una linea retta.* Si vegga l'Art. 66.

I valori di a, b, c si possono così determinare,

$$a=\frac{dx'}{dt}=\frac{\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right)}{\Sigma m}.$$

Ora se la velocità iniziale di m_1 è risolubile in u_1, v_1, w_1 parallele agli assi rispettivamente, e similmente per m_2, etc.

$$a=\frac{\Sigma(mu)}{\Sigma m}, \text{ e così per } b, \text{ etc.}$$

318. II. Conservazione del momento della quantità di moto. Ancora, è evidente che se moltiplichiamo successivamente l'equazione (1) per y_1, e l'equazione (2) per x_1, sottragghiamo, e prendiamo la somma di tutti questi resti per tutto il sistema di equazioni delle forme (1) e (2), avremo

$$\Sigma\left[m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt}\right)\right]=0.$$

Integrando una volta abbiamo

$$\Sigma\left[m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\right]=2A_3.$$

dove il primo membro è il momento della quantità di moto del sistema rispetto all' asse delle z.

Ora se nel piano delle xy prendiamo ρ, θ, le coordinate polari della proiezione di m,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \rho^2\frac{d\theta}{dt};$$

quindi
$$\Sigma\left(m\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2A_3.$$

Se a_z è l'area descritta dal raggio vettore ρ nel piano delle xy,

$$\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{da_z}{dt},$$

e la nostra equazione integrata dà

$$\Sigma(ma_z) = A_3 t,$$

nessuna costante essendo necessaria se conveniamo di contare a_z dalla posizione di ρ al tempo $t=0$.

Questa equazione mostra (essendo xy un piano qualunque) che generalmente nel moto di un sistema libero di elementi, assoggettati solamente alle loro attrazioni scambievoli, *il momento della quantità di moto intorno ad ogni asse rimane costante;* o, come si è solito dire non convenientemente, *la somma dei prodotti della massa di ciascun elemento del sistema, per l'area descritta dal raggio vettore della sua proiezione sopra un piano qualunque, ed intorno ad un punto qualunque in quel piano, sarà proporzionale al tempo*. Si vegga l' Art. 66.

Rappresentino a_x, a_y per i piani yz, xz quello stesso che a_z rappresenta per xy, allora

$$\Sigma(ma_x) = A_1 t,$$
$$\Sigma(ma_y) = A_2 t.$$

Il valore di questa quantità per un piano, di cui la normale ha i coseni di direzione λ, μ, ν, sarà

$$(\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3)\,t,$$

e sarà un massimo se

$$\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 \text{ è tale,}$$

avendo l'equazione di condizione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Questo dà $\lambda = \dfrac{A_1}{\sqrt{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)}} = \dfrac{A_1}{A}$ supponiamo,

con simili valori per μ e ν; ed il valore del prodotto per il piano così trovato è evidentemente At.

Quindi, vediamo ancora, che, come è evidente da quello che sopra si è stabilito, *l'asse intorno al quale il momento della quantità di moto è massimo rimane parallelo a sè stesso*, o, come comunemente si dice, *il piano pel quale la somma dei prodotti delle masse degli elementi per le aree in forma di settori descritte dai raggi vettori delle loro proiezioni è un massimo, è un piano fisso o parallelo ad un piano fisso durante il moto*. Esso è stato chiamato perciò il *Piano Invariabile*.

319. III. Conservazione dell'energia. Si moltiplichi

$$(1) \text{ per } \frac{dx_1}{dt}, \quad (2) \text{ per } \frac{dy_1}{dt}, \quad (3) \text{ per } \frac{dz_1}{dt};$$

e, trattando similmente tutte le altre equazioni, si sommino tutte insieme.

Consideriamo il risultato riguardo al termine del secondo membro che contiene il prodotto $m_p m_q$.

Scritto per esteso esso è

$$\frac{m_p m_q \varphi'({}_p r_q)}{{}_p r_q} \left\{ (x_q - x_p) \frac{dx_p}{dt} + (x_p - x_q) \frac{dx_q}{dt} \right.$$
$$\left. + \text{ simili termini in } y \text{ e } z \right\};$$

e la porzione in parentesi è eguale a

$$- \left\{ (x_q - x_p) \frac{d}{dt} (x_q - x_p) + \text{simili termini in } y, z \right\};$$

o,
$$- {}_p r_q \frac{d}{dt} ({}_p r_q);$$

quindi
$$\Sigma \left\{ m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} \right) \right\}$$
$$= - \Sigma \left\{ m_p m_q \varphi'({}_p r_q) \frac{d}{dt} ({}_p r_q) \right\};$$

quindi, con l'integrazione,

$$\frac{1}{2} \Sigma (mv^2) = C - \Sigma \left\{ m_p m_q \varphi ({}_p r_q) \right\}.$$

E prendendo questo integrale tra i limiti, vediamo che, *il cambiamento nell' Energia Cinetica del sistema in un tempo qualun-*

que dipende solamente dalle distanze relative degli elementi nel principio e nella fine di quel tempo, Art. 72.

320. Tanto basti per il caso di più elementi. Gli esempii più semplici si troveranno naturalmente nel caso di due soli elementi, ed a questo limiteremo la nostra attenzione; giacchè, quando se ne considerano tre o più, il problema non ammette esatta soluzione, e nelle due applicazioni più importanti che sono state fatte di esso, cioè alla Teoria Lunare ed alla Planetaria, si trova che un metodo distinto di approssimazione è richiesto per ciascuna.

Poichè l'accelerazione del centro d'inerzia è zero, ne segue che il moto di ciascun elemento rispetto a quel punto è lo stesso come se il secondo fosse in quiete. Ancora, se applichiamo a ciascun elemento del sistema un'accelerazione eguale ed opposta a quella di uno qualunque di essi, questo sarà ridotto in quiete, ed il moto relativo degli altri intorno ad esso non sarà mutato. Quindi, se ve ne sono solamente due, vediamo che il moto relativo di uno rispetto all'altro sarà lo stesso come se la somma delle masse si sostituisse per la seconda.

321. *Due elementi, che si muovono inizialmente con date velocità nella stessa linea retta, non sono soggetti ad altre forze che alla loro attrazione scambievole che è inversamente come il quadrato della distanza; determinare il moto.*

Il moto sarà evidentemente confinato alla linea retta. Siano m, m' le masse degli elementi valutate nell'ipotesi che l'unità di massa eserciti l'unità di forza all'unità di distanza; x, x' le loro distanze ad un tempo qualunque t da un punto fisso nella linea del moto, allora

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{mm'}{(x'-x)^2} \\ m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= -\frac{mm'}{(x'-x)^2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Quindi, se x_1 è la coordinata del centro di gravità al tempo t,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = (m+m')\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} &= (m+m')\frac{dx_1}{dt} = C \\ &= mV + m'V', \end{aligned}$$

se V e V' sono le velocità iniziali.

Integrando di nuovo,

$$mx + m'x' = (m + m')\, x_1 = (mV + m'V')\, t + C'$$
$$= (mV + m'V')\, t + ma + m'a' \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

se a, a' dinotano le posizioni iniziali degli elementi.

Ancora, dalle equazioni (1),

$$\frac{d^2(x'-x)}{dt^2} = -\frac{m+m'}{(x'-x)^2},$$

dalla quale, moltiplicando per m o m', vediamo che il moto relativo è lo stesso come se un elemento si movesse verso la somma delle masse riunite nell' altro, la posizione di quell'altro essendo considerata fissa.

Integrando una volta, abbiamo

$$\left\{\frac{d(x'-x)}{dt}\right\}^2 = C + 2\,\frac{m+m'}{x'-x}.$$

A $t=0$, questo è

$$(V'-V)^2 = C + 2\,\frac{m+m'}{a'-a};$$

ed, eliminando C,

$$\left\{\frac{d(x'-x)}{dt}\right\}^2 = (V'-V)^2 + 2\,(m+m')\left\{\frac{1}{x'-x} - \frac{1}{a'-a}\right\} \ldots (3).$$

Questa è della forma

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \frac{A}{\omega} \pm B;$$

onde
$$t = \int \frac{\sqrt{\omega}\, d\omega}{\sqrt{(A \pm B\omega)}},$$

che si può integrare ponendo $\omega = y^2$. L'integrale sarà circolare o logaritmico secondo che B è negativo o positivo. Così abbiamo $x'-x$ in termini di t, e siccome conosciamo inoltre $mx+m'x'$ da (2), il moto è completamente determinato.

Se nell' istante della proiezione

$$(V-V')^2 = \frac{2\,(m+m')}{a'-a},$$

la formola (3) diviene

$$\sqrt{(x'-x)}\,\frac{d(x'-x)}{dt} = \pm\sqrt{\{2(m+m')\}},$$

$$\frac{2}{3}(x'-x)^{\frac{3}{2}} = C \pm \sqrt{\{2(m+m')\}}\,t,$$

$$\frac{2}{3}(a'-a)^{\frac{3}{2}} = C,$$

ed il moto è completamente determinato.

322. Vi è un altro metodo di trattare questo problema. Supponiamo che, invece di determinare il moto relativo degli elementi, consideriamo quello di ciascuno relativamente al comune centro d'inerzia. La distanza di m dal centro d'inerzia è

$$x_1 - x = \frac{mx + m'x'}{m+m'} - x = \frac{m'(x'-x)}{m+m'};$$

e troviamo facilmente da (1),

$$m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\frac{mm'}{(x'-x)^2} - \frac{m'^2}{(x'-x)^2}.$$

Quindi, per il moto relativo di m e del centro d'inerzia,

$$m\,\frac{d^2(x_1-x)}{dt^2} = -\frac{mm'}{(x'-x)^2}$$

$$= -\frac{mm'^3}{(m+m')^2(x_1-x)^2};$$

da cui $x_1 - x$ si può determinare, in termini finiti circolari o logaritmici, come sopra.

323. *Due elementi, proiettati comunque, sono sollecitati solamente dalla loro attrazione scambievole, mostrare che la linea che li congiunge è sempre parallela ad un piano fisso.* [Questo è chiaro dall'Art. 26].

Se m ed m' sono gli elementi, x, y, z, x', y', z', le loro coordinate al tempo t, r la loro distanza, e P l'attrazione scambievole, abbiamo le seguenti equazioni,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\frac{x'-x}{r}, \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = P\frac{x-x'}{r},$$

con simili espressioni per le altre coordinate; quindi

$$\frac{\frac{d^2(x'-x)}{dt^2}}{x'-x} = \frac{\frac{d^2(y'-y)}{dt^2}}{y'-y} = \frac{\frac{d^2(z'-z)}{dt^2}}{z'-z},$$

ed integrando,

$$(x'-x)\frac{d(y'-y)}{dt} - (y'-y)\frac{d(x'-x)}{dt} = C_3,$$

con due altre simili equazioni. Quindi

$$C_3(z'-z) + C_2(y'-y) + C_1(x'-x) = 0.$$

Quindi la linea che congiunge gli elementi è sempre parallela al piano i di cui coseni di direzione sono C_1, C_2, C_3. Questo corrisponde all'Art. 318.

Inoltre è evidente che il moto degli elementi l'uno rispetto all'altro in un piano parallelo a questo è lo stesso come se il piano fosse in quiete (Art. 320).

Dalle proposizioni precedenti ciò che segue è un'evidente deduzione.

Il centro d'inerzia dei due elementi è in quiete solamente quando le velocità iniziali sono zero, o pure quando le direzioni della proiezione sono le stesse o parallele, e le quantità di moto eguali ed opposte.

Il piano del moto relativo sarà in quiete solamente quando le direzioni iniziali giacciono in un piano.

Se la forza è inversamente come il quadrato della distanza, le orbite relative degli elementi l'uno intorno all'altro, e quindi (Art. 27) intorno al loro centro d'inerzia, saranno sezioni coniche intorno ad un fuoco.

È inutile di proseguire ciò davantaggio, giacchè i risultati precedenti ci abilitano a ridurre il problema a casi trattati nei capitoli precedenti.

324. *Due elementi nello spazio si muovono sotto l'azione di date forze, come anche delle loro scambievoli attrazioni; determinare il moto.*

Prendendo la stessa notazione come nell'Art. 323, se X, Y, Z, X', Y', Z' sono le parti risolute delle forze date sull'unità di massa, abbiamo

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\frac{x'-x}{r} + mX, \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = P\frac{x-x'}{r} + m'X',$$

con simili equazioni per le altre coordinate.

Quindi, $$\frac{d^2(x'-x)}{dt^2} = -\frac{m+m'}{mm'} P \frac{x'-x}{r} + X' - X,$$

e così di seguito. Così vediamo che il moto relativo intorno ad m si troverà applicando a tutti e due gli elementi (in direzioni opposte) le forze all'azione delle quali m è assoggettato.

Inoltre, se x_1, y_1, z_1 sono le coordinate del centro d'inerzia, troviamo, da ciò che precede, tre equazioni della forma

$$(m+m')\frac{d^2x_1}{dt^2} = m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = mX + m'X',$$

le quali mostrano che *il movimento del centro d'inerzia è lo stesso come se gli elementi fossero riuniti in un solo, e sollecitati dall'insieme delle forze proposte.*

II. *Moto non libero.*

325. Del moto non libero degli elementi, possiamo solamente prendere esempii particolari, ma vi sono alcune considerazioni generali che meritano attenzione.

Se due elementi sono connessi da un filo inestensibile, il solo effetto si è d'impendire che la loro distanza relativa diventi maggiore della sua propria lunghezza. Se introduciamo una forza ignota T, per la tensione del filo, si possono scrivere le equazioni del moto, e la condizione che la distanza degli elementi sia eguale ad una data quantità ci darà un'equazione addizionale, che ci abilita ad eliminare, o a trovare il valore di questa forza ignota. Se ad un tempo qualunque il valore di T così trovato diviene eguale a zero, il moto degli elementi si può investigare da quel momento in poi come se essi fossero liberi, finchè i valori delle coordinate mostrino che il filo incomincerà a esser teso di nuovo. In un tal caso, se le loro velocità risolute secondo la linea che li congiunge non sono eguali, avrà luogo un urto, i di cui effetti debbono essere investigati con i metodi del Cap. X.

Quando gli elementi sono connessi da una verga rigida senza massa, abbiamo una reazione ignota nella direzione della verga; e, per determinarla, abbiamo la condizione geometrica che la distanza tra gli elementi è costante.

Se vi sono più di due elementi attaccati alla verga, essa può esercitare una forza trasversale; ma i casi di questa natura appartengono più propriamente alla Dinamica di un Corpo Rigido; e perciò omettiamo ogni considerazione di essi.

326. *Due elementi, congiunti l'uno all'altro per mezzo di un filo inestensibile, sono proiettati con date velocità nello spazio; determinare il moto.*

Possiamo senza perdita di generalità considerare che la distanza tra gli elementi nell'istante della proiezione, sia eguale alla lunghezza del filo. Se le loro velocità sono interamente perpendicolari alla sua direzione, o se le loro parti risolute secondo di essa sono eguali e nella stessa direzione, non vi sarà alcun urto. Altrimenti, si supponga che le masse m ed m' abbiano le velocità v e v' parallele al filo nell'istante che è disteso. È evidente che l'urto cambierà ciascuna di queste in $\frac{mv+m'v'}{m+m'}$. Questa quindi è determinata; così possiamo ora in aggiunta supporre le parti risolute delle velocità secondo il filo eguali tra loro. Siano x, y, z, x', y', z', ad un tempo qualunque le coordinate degli elementi, allora, se a è la lunghezza del filo,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = T\frac{x'-x}{a}, \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = T\frac{x-x'}{a};$$

e così di seguito.

Inoltre, $\quad (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 = a^2,$

che sono sette equazioni per trovare T, e le sei coordinate di m ed m'. Dalla forma delle equazioni, o trattandole come nell'Art. 323, vediamo che il filo rimane parallelo ad un piano fisso, che il centro d'inerzia si muove uniformemente in una linea retta, e che il moto degli elementi l'uno intorno all'altro ed intorno al centro d'inerzia è lo stesso come se quel punto fosse in quiete. Quindi, gli elementi girano con velocità angolare uniforme, e la tensione del filo è costante. Dalle equazioni precedenti

$$T = \frac{mm'}{m+m'}\frac{V^2}{a},$$

dove $\quad V = \sqrt{\left[\left\{\frac{d(x'-x)}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{d(y'-y)}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{d(z'-z)}{dt}\right\}^2\right]}$

è la velocità relativa. Lo stesso risultato si potrebbe ottenere facilmente usando l'ultima formola nell'Art. 130 se consideriamo che la velocità di m relativa al centro d'inerzia è $\frac{m'V}{m+m'}$, che il raggio del circolo che esso descrive intorno a quel punto è $\frac{m'a}{m+m'}$, e che T è la forza che lo mantiene in quel circolo.

327. *Due elementi, congiunti da un filo inestensibile che passa su di una piccola carrucola levigata, si muove sotto l'azione della gravità; determinare il moto.*

Questo fu in parte anticipato nell'Art. 325. Siano m, m' le masse, e dinotino x, x' le distanze dalla carrucola al tempo t. Allora se T è la tensione del filo (da per tutto la stessa essendo la carrucola levigata), abbiamo

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-T,$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2}=m'g-T.$$

Ma $x+x'=$ lunghezza del filo $=a$ supponiamo. Quindi supponendo $m>m'$,

$$(m+m')\frac{d^2x}{dt^2}=(m-m')\,g\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Questa equazione determina completamente il moto. Inoltre, se eliminiamo x ed x', abbiamo

$$T=\frac{2mm'}{m+m'}\,g\,,$$

ed essa è perciò costante.

Questo è uno dei casi in cui i risultati teoretici si possono comprovare con l'attuale esperimento con considerevole accuratezza. E fu di questa combinazione, con molte delicate precauzioni contro l'attrito, etc. che Atwood fece uso per la verificazione delle leggi del moto.

Vediamo, per esempio, dall'equazione (1), che possiamo facilmente tenere $m+m'$ costante mentre $m-m'$ ha un valore qualunque, e così misurando le accelerazioni prodotte, trovare se esse sono, nella stessa massa, proporzionali alle forze che producono il moto. Ancora, tenendo $m-m'$ costante, $m+m'$ si può variare a piacere. Quindi con questo procedimento si può provare la seconda legge del moto. Si vegga l'Art. 62. Ancora se, mentre le masse sono in moto, una porzione è subitaneamente tolta dalla maggiore sicchè esse rimangano eguali, (1) ci mostra che l'osservazione ci abiliterà a provare la prima legge del moto.

328. Invece di due masse, connesse da un filo, supponiamo che una catena flessibile ed uniforme di lunghezza $2a$ sia sospesa dalla carrucola; allora se x è la lunghezza che pende da una parte

al tempo t, vi sarà $2a-x$ dall'altra, e la differenza

$$2(x-a),$$

è la porzione il di cui peso accelera il moto. Quindi, μ essendo la massa della catena per l'unità di lunghezza, abbiamo

$$2\mu a \frac{d^2x}{dt^2} = 2\mu g (x-a);$$

che dà
$$x - a = Ae^{\sqrt{\frac{g}{a}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{a}}t}.$$

Se la catena fosse inizialmente in quiete, una porzione $a+b$ essendo da una parte della carrucola,

$$b = A + B,$$
$$0 = A - B;$$

onde
$$x - a = \frac{b}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{a}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}t}\right).$$

Questo è vero finchè $x=2a$, cioè, finchè la catena lascia la carrucola; il valore di t in quell'istante essendo t_0, abbiamo

$$\frac{2a}{b} = e^{\sqrt{\frac{g}{a}}t_0} + e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}t_0};$$

e quindi
$$t_0 = \sqrt{\frac{a}{g}} \log\left\{\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)}\right\}.$$

Se, per esempio, $b = \frac{3a}{5}$, cioè se le porzioni della catena fossero inizialmente come 4 : 1,

$$t_0 = \sqrt{\frac{a}{g}} \log 3.$$

329. *Un elemento, di massa* m, *è sospeso da una piccola carrucola, e l'altro estremo del filo è legato ad una massa* m' *che giace sopra un piano orizzontale levigato; determinare il moto.*

Sia a la lunghezza del filo, allora è evidente che se b è l'altezza della carrucola sopra il piano, θ l'angolo che il filo attaccato ad m' fa con la verticale, ed x la distanza di m dalla carrucola, dobbiamo avere

$$x + \frac{b}{\cos\theta} = a \text{ .... } (1).$$

Inoltre, se T è la tensione del filo, le equazioni del moto sono

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= mg - T \\ m'\frac{d^2(b\tan\theta)}{dt^2} &= -T\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (2).$$

Queste saranno sufficienti per la determinazione del moto, e della tensione del filo; a meno che $T\cos\theta$ non divenisse maggiore di $m'g$, nel qual caso la massa m' sarà tolta dal piano, ed invece dell'ultima delle equazioni (2) dobbiamo avere due equazioni per la determinazione del suo moto.

330. *Due elementi,* m, m', *connessi da una verga rigida, sono costretti a muoversi rispettivamente sopra due linee rette in un piano verticale, inclinate sotto gli angoli* α, α' *alla verticale; determinare il moto, e trovare il tempo di una piccola oscillazione intorno alla posizione di equilibrio.*

Sia θ l'inclinazione della verga alla verticale al tempo t, T la sua tensione, R, R' le reazioni delle linee, x, x' le distanze degli elementi dal punto d'intersezione delle linee, ed a la lunghezza della verga.

Allora,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= mg\cos\alpha + T\cos(\theta+\alpha) \\ m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= m'g\cos\alpha' - T\cos(\theta-\alpha') \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (1).$$

$$\left.\begin{aligned} R &= mg\operatorname{sen}\alpha + T\operatorname{sen}(\theta+\alpha) \\ R' &= m'g\operatorname{sen}\alpha' + T\operatorname{sen}(\theta-\alpha') \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (2),$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos(\alpha+\alpha') - a\cos(\theta+\alpha) \\ x' &= x\cos(\alpha+\alpha') + a\cos(\theta-\alpha') \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (3).$$

Queste sei equazioni danno x, x', R, R', T e θ in termini di t, e così teoreticamente completano la soluzione.

331. Per il tempo di una piccola oscillazione, dobbiamo prima trovare la posizione di equilibrio. Questa si otterrà, naturalmente, eguagliando a zero i secondi membri delle equazioni (1). (Art. 63). Corrispondano x_1, x_1' a questa posizione, e sia

$$x = x_1 + \xi, \quad x' = x_1' + \xi',$$

dove ξ e ξ' sono infinitamente piccole.

Eliminando T dalle equazioni (1), e sostituendo per θ in termini di x ed x' per mezzo di (3), abbiamo, ponendo $\beta=\alpha+\alpha'$,

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}-g\cos\alpha\right)(x'-x\cos\beta)-m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-g\cos\alpha'\right)(x-x'\cos\beta)=0.$$

Ma $$x^2+x'^2-2xx'\cos\beta=a^2;$$

dalla quale, trascurando le quantità del secondo ordine, vediamo che

$$x_1\xi+x_1'\xi'-(x_1\xi'+x_1'\xi)\cos\beta=0;$$

onde $$\xi'=\xi\frac{x_1-x_1'\cos\beta}{x_1\cos\beta-x_1'}.$$

Quindi, eliminando x, x', e ξ' da queste equazioni, abbiamo

$$m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-g\cos\alpha\right)\left\{x_1'-x_1\cos\beta+\xi\left(\frac{x_1-x_1'\cos\beta}{x_1\cos\beta-x_1'}-\cos\beta\right)\right\}$$

$$-m'\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\frac{x_1-x_1'\cos\beta}{x_1\cos\beta-x_1'}-g\cos\alpha'\right)$$

$$\times\left\{x_1-x_1'\cos\beta+\xi\left(1-\frac{x_1-x'\cos\beta}{x_1\cos\beta-x_1'}\cos\beta\right)\right\}=0.$$

Ritenendo solamente i termini del primo ordine in ξ, poichè i termini che non contengono ξ o i suoi coefficienti differenziali debbono evidentemente svanire da sè stessi, abbiamo

$$\{m(x'-x\cos\beta)^2+m'(x_1-x_1'\cos\beta)^2\}\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$+g\,\text{sen}^2\beta\,(mx_1\cos\alpha+m'x_1'\cos\alpha')\xi=0,$$

un'equazione della forma

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+n^2\xi=0;$$

ed il tempo dell'oscillazione è $\frac{2\pi}{n}$. Art. 119.

332. *Due elementi pesanti,* m *ed* m', *sono legati in punti diversi ad un filo inestensibile, di cui una delle estremità è fissa. Se il sistema è spostato, determinare il moto.*

Si prendano gli assi delle x ed y orizzontali, e quello delle z verticalmente in giù, l'estremità del filo essendo l'origine.

Siano a, a' le lunghezze delle porzioni del filo, θ, θ' gli angoli che esse fanno con la verticale, φ, φ' gli angoli che i piani verticali condotti per esse al tempo t fanno col piano delle xz. Siano x, y, z, x', y', z', le coordinate degli elementi e T, T' le tensioni dei fili.

Allora
$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -T\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + T'\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi', \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -T\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + T'\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi', \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= mg - T\cos\theta + T'\cos\theta', \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= -T'\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi', \\ m'\frac{d^2y'}{dt^2} &= -T'\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi', \\ m'\frac{d^2z'}{dt^2} &= m'g - T'\cos\theta'. \end{aligned}\right\}$$

Oltre di queste, abbiamo le sei equazioni per x, y, z, x', y', z' in termini di $a, a', \theta, \varphi, \theta', \varphi'$; in tutto, dodici equazioni per la determinazione delle dodici quantità ignote in termini di t.

333. Queste equazioni si semplificheranno di molto se consideriamo che gli spostamenti siano in un piano, poichè il moto sarà evidentemente confinato in quel piano. Con questo mezzo ci liberiamo immediatamente di y, y', φ e φ'. Una maggiore semplificazione ancora si otterrà prendendo inoltre la condizione che θ e θ' siano così piccoli, che i loro quadrati e le potenze superiori si possano trascurare. Con questo le nostre equazioni diventano

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -T\theta + T'\theta', \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= mg - T + T', \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= -T'\theta', \\ m'\frac{d^2z'}{dt^2} &= m'g - T'. \end{aligned}\right\}$$

E, con una sufficiente approssimazione,

$$x = a\theta,$$

$$x' = a\theta + a'\theta',$$

$$z = a$$

$$z' = a + a'.$$

Quindi, $T' = m'g$, e $T = (m + m')g$,

$$\left.\begin{aligned} ma\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -(m+m')g\theta + m'g\theta', \\ m'\left(a\frac{d^2\theta}{dt^2} + a'\frac{d^2\theta'}{dt^2}\right) &= -m'g\theta'. \end{aligned}\right\}$$

Introducendo un moltiplicatore indeterminato, e sommando,

$$(m+\lambda m')\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda m'\frac{a'}{a}\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{g}{a}\{(m+m')\theta + m'(\lambda-1)\theta'\} = 0.$$

Siano λ_1, λ_2 le radici dell'equazione

$$\frac{\lambda}{m+\lambda m'}\frac{a'}{a} = \frac{\lambda - 1}{m + m'}.$$

Evidentemente una è positiva e l'altra negativa, e la forma dell'equazione mostra che per entrambe $m + \lambda m'$ è positiva.

Si ponga $\varphi = \theta + \frac{\lambda m'}{m + \lambda m'}\frac{a'}{a}\theta' = \theta + k\theta'$, supponiamo.

Allora l'equazione precedente dà

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{a}\frac{m+m'}{m+\lambda m'}\varphi = 0.$$

Per la recente osservazione il coefficiente di φ è positivo per tutti e due i valori di λ; siano i suoi valori n_1^2, ed n_2^2, ed abbiamo, k_1, φ_1, k_2, φ_2, essendo i valori corrispondenti di k e φ,

$$\varphi_1 = \theta + k_1\theta' = \alpha_1 \cos(n_1 t + \beta_1),$$

$$\varphi_2 = \theta + k_2\theta' = \alpha_2 \cos(n_2 t + \beta_2),$$

dove α_1, α_2, β_1, β_2, sono costanti arbitrarie.

Quindi,

$$\theta = \frac{1}{k_2 - k_1} \{ k_2\alpha_1 \cos(n_1 t + \beta_1) - k_1\alpha_2 \cos(n_2 t + \beta_2) \},$$

$$\theta' = \frac{1}{k_1 - k_2} \{ \alpha_1 \cos(n_1 t + \beta_1) - \alpha_2 \cos(n_2 t + \beta_2) \}.$$

Avendo dato i valori iniziali di θ, θ', $\frac{d\theta}{dt}$ e $\frac{d\theta'}{dt}$, troviamo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, e così la soluzione è completa. Si può notare che i valori di θ e θ' si possono trovare ad ogni tempo prendendo la somma algebrica dei valori corrispondenti delle inclinazioni alla verticale dei due pendoli di cui i tempi delle oscillazioni sono $\frac{2\pi}{n_1}$ e $\frac{2\pi}{n_2}$. Inoltre, se n_1, n_2, sono commensurabili, il sistema ritornerà in tempo alla sua prima posizione, ed il moto sarà periodico.

Una leggiera modificazione del procedimento ci dà il risultato di *piccoli* spostamenti non in un piano: ma lo studente può facilmente trovare questo da sè stesso.

Abbiamo qui un esempio semplice del principio della *Coesistenza delle Piccole Oscillazioni*; ma questo principio, per essere trattato in modo soddisfacente, richiede in generale l'uso del Principio di d'Alembert; il quale, sebbene (Art. 68) semplicemente un corollario della Terza Legge del Moto, e chiaramente indicato da Newton come tale, è fuori dei limiti stabiliti pel presente trattato.

334. Gli esempii, che abbiamo ora dato, bastano per dare una idea del modo di applicare i nostri metodi ad ogni caso proposto di moto di due elementi non liberi. Questi metodi sono applicabili a casi più complicati, quando si considerano più di due elementi; ma nulla si guadagnerebbe con questo procedimento, poichè il Principio di d'Alembert ci dà un modo molto più semplice d'investigare i movimenti di un sistema qualunque di elementi liberi o pur no: specialmente quando esso è semplificato nella sua applicazione dal bel sistema delle *Coordinate Generalizzate* introdotte da Lagrange. Si vegga *Natural Philosophy* di Thomson e Tait.

ESEMPII.

1. Due sfere di cui le masse sono M ed M' sono situate a contatto, ed una di esse è proiettata nella linea dei centri con velocità V. Se la legge di attrazione è D^{-2}, trovare dove, e dopo qual tempo, esse s'incontreranno.

2. Se il sole fosse spezzato in un numero indefinito di frammenti, riempiendo uniformemente la sfera di cui l'orbita della terra è un circolo massimo, mostrare che ciascuno si rivolgerebbe in un anno.

3. Un sottile strato sferico di massa M è scomposto simmetricamente da una esplosione interna. Mostrare che se, quando lo strato ha un raggio a, la velocità esteriore di ciascun elemento è v, i fragmenti non potranno mai riunirsi per la loro mutua attrazione a meno che

$$v^2 < \frac{M}{a}.$$

4. Due elementi eguali sono inizialmente in quiete in due tubi levigati ad angoli retti tra loro. Mostrare che qualunque siano le loro posizioni, e qualunque sia la loro legge di attrazione, essi giungeranno insieme alla linea d'intersezione dei tubi.

5. Nell'ultima quistione supponiamo che le distanze originali dall'intersezione dei tubi siano a, b, e l'attrazione inversamente come il quadrato della distanza, trovare le traiettorie susseguenti se ad un istante qualunque gli elementi si rendono liberi.

6. Più elementi eguali, che si attraggono tra loro direttamente come la distanza, sono costretti a muoversi in tubi paralleli; se sono date le posizioni degli elementi al principio del moto, determinare il moto susseguente di ciascuno; e mostrare che gli elementi oscilleranno simmetricamente rispetto al piano perpendicolare ai tubi che passa per il loro centro d'inerzia al principio del moto.

7. Due date masse sono connesse da un filo leggermente elastico, e sono proiettate in modo da muoversi in giro; trovare il tempo di una piccola oscillazione nella lunghezza del filo.

8. Due masse eguali M, sono connesse da un filo che passa per un foro in un piano orizzontale levigato. Una di essa pendendo verticalmente, mostrare che l'altra descrive sul piano una curva di cui l'equazione differenziale è

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{u}{2} - \frac{g}{2h^2u^2} = 0,$$

e che la tensione del filo è

$$M\frac{g + h^2u^3}{2}.$$

9. Due elementi eguali connessi da un filo sono situati in un

tubo circolare. Nella circonferenza è un centro di forza come $\frac{1}{D}$. Un elemento è inizialmente alla sua massima distanza dal centro di forza, mostrare che se v, v' sono le velocità con le quali essi passano per un punto a 90° dal centro di forza,

$$e^{-\frac{v^2}{\mu}} + e^{-\frac{v'^2}{\mu}} = 1.$$

10. Due palle eguali che si respingono scambievolmente con una forza come $\frac{1}{D^2}$ pendono dallo stesso punto per mezzo di fili di lunghezza l. Mostrare che se quando sono in equilibrio, i fili facendo un angolo 2α tra loro, essi si avvicinano per piccoli archi eguali, il tempo di un'oscillazione è lo stesso come quello di un pendolo la di cui lunghezza è

$$\frac{l \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

11. Uno di due elementi eguali connessi da un filo inelastico si muove in una scannellatura rettilinea, l'altro è proiettato parallelamente alla scannellatura, il filo essendo teso; determinare il moto, e mostrare che la massima tensione è quattro volte la minima.

12. Due elementi sono connessi da un filo elastico di lunghezza $2a$, ed uno è proiettato perpendicolarmente al filo quando non è disteso. Mostrare che nell'orbita relativa

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{p^2} \text{ come } (r-a)^2.$$

13. Due elementi eguali connessi da una verga rigida si muovono su di un circolo verticale. Se essi sono leggermente disturbati dalla posizione più elevata di equilibrio, determinare il moto.

Inoltre trovare il tempo di una piccola oscillazione intorno alla posizione di equilibrio stabile.

14. Due elementi P e Q sono connessi da una verga rigida. P è costretto a muoversi in una scannellatura orizzontale levigata. Se gli elementi sono inizialmente in quiete, PQ facendo un dato angolo con la scannellatura in un piano verticale condotto per essa, trovare la velocità di Q quando esso giunge alla scannellatura, e mostrare che la traiettoria di Q nel piano verticale è un'ellisse.

15. Un elemento di massa m ha attaccati a sè due pesi eguali m' per mezzo di fili che passano sopra carrucole nello stesso piano orizzontale, ed è inizialmente in quiete ad eguali distanze da essi. Determinare il moto. Mostrare che se la distanza tra le carrucole è $2a$, la velocità di m sarà zero quando è disceso per uno spazio

$$\frac{4mm'a}{4m'^2 - m^2},$$

e che avrà la sua massima velocità quando passa per la sua posizione di equilibrio statico. (Art. 72).

16. Due masse M, M' sono connesse da un filo che passa su di una caviglia levigata. Ad M' è attaccato un filo che sostiene una massa m tale che $M'+m=M$, ed m è spostato per un angolo α. Investigare il moto, supponendo m così piccola che il moto orizzontale di M' si possa trascurare. Mostrare che il filo $M'm$ sarà verticale dopo il tempo

$$\left(\frac{\lambda}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\alpha} \left(\frac{1 - \frac{m}{2M} \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta - \cos \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

dove λ è la lunghezza di $M'm$.

ESEMPII GENERALI.

1. Una molla spirale è distesa di un pollice da ciascuna libbra addizionale sospesa al suo estremo inferiore; trovare la massima velocità che sarà acquistata da una massa di 20 libbre sospesa alla molla non distesa ed alla quale si permette di discendere.

Inoltre trovare fin dove scenderà la massa, ed il tempo di una completa oscillazione.

2. Trovare la forma dell'odografo, e la legge della sua descrizione, per ogni punto di un disco circolare che rotola uniformemente su di un altro. Quindi, trovare la forza sotto la quale un elemento libero descriverà un'epitrocoide, come essa è descritta da un punto del disco che rotola uniformemente.

3. Trovare la legge della forza quando la brachistocrona è un'ellisse col centro di forza nel suo fuoco.

4. Una verga scorre tra due sbarre orizzontali parallele scabre, in un piano perpendicolare alle sbarre: determinare il moto quando esso è rettilineo, ma nè orizzontale nè verticale.

5. Determinare il moto (senza resistenza) di una massa proiettata verticalmente ad un dato punto della superficie della terra con una velocità di 7 miglia per secondo.

6. Applicare il principio dell'azione variante alla determinazione del moto (senza resistenza) di un proiettile.

7. Mostrare che *l'azione* ed il *tempo*, in un area qualunque dell'ordinaria brachistocrona che incomincia dalla cuspide, sono rappresentati dall'*area* e dall'*arco* del segmento corrispondente del circolo generatore.

8. Nel moto parabolico di un proiettile, *l'azione* è rappresentata dall'area inclusa tra la curva, la direttrice, e le due ordinate verticali: ed il *tempo* dalla parte intercetta sulla direttrice.

9. Data un'orbita centrale, e la legge della sua descrizione, trovare l'equazione differenziale di una curva tale che se si tirino ad essa le tangenti da due punti qualunque dell' orbita, l'azione sia rappresentata dall'area inclusa tra queste tangenti e le due curve.

10. Un elemento si muove in una data linea, sotto l'azione di una forza $=-\mu s-f\frac{ds}{dt}$; ed un dato impulso agisce su di esso, alternativamente in direzioni opposte nella sua linea di moto, ad intervalli ciascuno eguale a T. Trovare il moto periodico che ne risulta. (Questo è il problema generale del moto del pendolo di un orologio controllato elettricamente).

11. Il punto di sospensione di un pendolo semplice ha un moto orizzontale espresso da

$$x = a \cos mt.$$

Trovare l'effetto sul moto del pendolo, specialmente quando

$$m^2 = \frac{g}{l},$$

o presso a poco così, l essendo la lunghezza del pendolo.

12. Determinare il moto più generale (piccolo) di un elemento pesante attaccato in un dato punto ad un filo elastico disteso. Mostrare che esso vibrerà con eguale rapidità in tutte le direzioni dello spostamento, comunque il filo sia disteso, purchè l'elemento sia situato ad una distanza da un estremo eguale alla metà della lunghezza del filo non teso.

13. Un elemento P descrive un' ellisse liberamente sotto l'attrazione di un secondo elemento G che è costretto a muoversi lungo l' asse maggiore; G, ma non P, è attratto dal centro; trovare le leggi delle attrazioni affinchè PG sia sempre normale in P.

Se fosse concepibile che P respinga G con la stessa forza con la quale G attrae P, una certa relazione tra le masse dei due elementi renderebbe non necessaria una forza al centro.

14. Un elemento P descrive un' ellisse P con velocità uniforme sotto l'azione di due forze eguali, l'una diretta verso il fuoco F, e proporzionale a CD^n, e l'altra verso l' altro fuoco H; CD essendo il semidiametro coniugato a CP. Mostrare che $n=-2$.

15. Un elemento P è attaccato ad un punto Q per mezzo di un filo metallico senza peso, ed è sollecitato da una forza il di cui effetto accelerante varia come la distanza da un punto Q al quale essa tende; dimostrare che, se Q è costretto a muoversi in un circolo con la stessa velocità come un elemento libero descriverebbe quel circolo sotto l' azione della forza, P in tutt' i casi si muoverà uniformemente relativamente a Q in un piano parallelo ad un piano fisso. Se QO è la lunghezza del filo metallico, mostrare che, se P è sempre in quiete, la sua traiettoria assoluta sarà una linea retta.

16. Più elementi pesanti eguali sono legati ad eguali distanze a su di un filo inelastico, e posti in contatto in una linea verticale; mostrare che se al più basso si permette allora di cadere liberamente, la velocità con la quale l'n^{mo} incomincia a muoversi è eguale a

$$\sqrt{ag\frac{(n-1)(2n-1)}{3n}}.$$

17. Due elementi, di masse m ed m' rispettivamente, sono connessi da un filo elastico di modulo $2a$. Il sistema è poi sospeso da una carrucola levigata e disposto in modo che ciascun elemento sia alla distanza a dalla carrucola. Se il sistema è allora lasciato a sè stesso ed y, y' sono le distanze degli elementi dalle loro posizioni iniziali al tempo t, allora

$$my - m'y' = (m - m')\frac{gt^2}{2}.$$

18. Un elemento attaccato all'estremo di un filo poggia sopra una tavola orizzontale levigata; il filo passa per un piccolo foro nella tavola attraverso il quale esso è tirato con velocità uniforme; dimostrare che se l'elemento è sollecitato da una forza in-

versamente proporzionale alla sua distanza dal foro, e perpendicolare al filo, esso descriverà se proiettato convenientemente una spirale equiangola.

19. Un centro di forza che attrae un elemento di massa m con una forza $mw \times$ distanza, si muove nella circonferenza di un circolo di raggio a con velocità angolare uniforme w, ed un elemento è posto nel punto medio della distanza tra il centro di forza ed il centro del circolo; se r e θ sono le sue coordinate polari quando il centro di forza si è mosso per un arco $a\varphi$, dimostrare che

$$r = \frac{a}{2}(1 + \varphi^2), \quad \theta + \varphi = \tan\theta,$$

il centro del circolo essendo il polo, e la linea iniziale passando per la posizione iniziale dell'elemento.

20. Tre elementi ciascuno di massa m giacciono su di una tavola orizzontale levigata in una linea retta congiunti insieme da due fili, ciascuno di lunghezza a. I due elementi estremi sono proiettati simultaneamente con la stessa velocità v in una direzione perpendicolare ai fili, dimostrare che

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{a^2} \frac{1}{2 - \cos 2\theta},$$

dove θ è l'angolo che il filo che congiunge l'elemento medio con ciascuno degli altri due ha percorso in un tempo qualunque.

21. Tre elementi sono congiunti da due fili eguali e sono situati in una linea retta su di una tavola levigata; se l'elemento medio è proiettato perpendicolarmente al filo con una velocità V, la velocità degli altri due quando si urtano è

$$\frac{2V}{3}.$$

22. Due elementi pesanti sono congiunti da un filo che passa per un piccolo anello, gli elementi sono tenuti nella stessa linea orizzontale, ed il filo è tirato e poi lasciato andare; se ρ, ρ' sono i raggi di curvatura delle loro traiettorie inizialmente, a, a' le lunghezze iniziali delle porzioni del filo, m, m' le loro masse, mostrare che

$$\frac{m}{\rho} = \frac{m'}{\rho'}, \text{ ed } \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}.$$

23. Investigare l'equazione del moto di una catena costretta a muoversi in un sottile tubo sotto l'azione di date forze.

Una catena pesante di lunghezza $4a$ è raggomitolata su di una tavola orizzontale alla distanza a da uno spigolo della tavola, ed un estremo della catena è poi tirato ad angoli retti sullo spigolo passando al di sopra di esso; l'altezza della tavola sul suolo essendo a, investigare completamente il movimento della catena.

24. Un filo elastico di lunghezza a, e di massa ma, è situato in un tubo in forma di una spirale equiangola con un estremo attaccato al polo. Il piano della spirale è orizzontale, ed il tubo si fa girare con velocità angolare uniforme ω intorno ad un asse verticale per il polo; dimostrare che la sua lunghezza, quando è in relativo equilibrio, è data dall'equazione

$$l = a\frac{\tan\varphi}{\varphi},$$

dove
$$\varphi = a\omega\cos\alpha\sqrt{\frac{m}{\lambda}}.$$

25. Un elemento pesante è sospeso da un punto fisso per mezzo di un filo elastico, ed esegue piccole oscillazioni in una direzione verticale; supponendo il filo uniforme nel suo stato naturale e di piccola massa finita, mostrare che il tempo dell'oscillazione sarà approssimativamente lo stesso come se il filo fosse senza peso e la massa dell'elemento accresciuto di un terzo di quella del filo.

26. La resistenza dell'etere ad un pianeta o ad una cometa che si muove con la velocità V essendo supposta essere $k\,\frac{dV}{dt}$ e l'attrazione del sole essendo $\frac{\mu}{r^2}$, ottenere le equazioni esatte seguenti:

$$V^2(1+k) - \frac{2\mu}{r} = C,$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = hV^{-k}.$$

Inoltre ottenere l'equazione differenziale dell'orbita nella forma

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{(C-2\mu u)^{1-k}}{h^2(1-k)^{1-k}}.$$

27. Un corpo si muove in un piano intorno ad un punto fisso sotto l'azione di date forze. Se la velocità dell'area e la direzione del moto del corpo in un punto proposto sono conosciute, trovare il semi-lato-retto dell'orbita ellittica che ha un contatto di se-

condo ordine con l'orbita reale in quel punto, il suo fuoco essendo al dato punto fisso.

Inoltre trovare i cambiamenti prodotti in un tempo infinitamente piccolo nell'eccentricità e nella posizione dell'apside in quest'orbita ellittica in termini dei corrispondenti cambiamenti del semi-lato-retto.

28. Dimostrare che la traiettoria apparente di una cometa sulla sfera celeste è concava o convessa verso l'apparente situazione del sole secondo che la cometa o la terra è più vicina al sole.

29. È stato trovato paragonando la teoria con l'osservazione che il perielio di Mercurio si avanza ad una ragione più grande di α di quella dovuta all'attrazione dei corpi conosciuti; mostrare che si darebbe conto di questo incremento se la legge della forza che tende al sole fosse $\frac{\mu}{r^2}+\frac{\mu'}{r^4}$, e se $\mu'=\alpha\sqrt{\frac{\mu}{c}}$, l'orbita essendo supposta prossimamente circolare e la media distanza essere c.

30. Una cometa che si muove in un'orbita parabolica si avvicina di molto ad un pianeta; indicare da considerazioni generali le circostanze nelle quali l'orbita della cometa è resa ellittica o iperbolica.

FINE DELLA DINAMICA DI UN ELEMENTO.

DINAMICA

PARTE SECONDA

DINAMICA DI UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI,

DINAMICA DI UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI.

CAPITOLO I.

Sopra i Momenti d'Inerzia.

Sezione I. — *Proprietà elementari.*

1. Def. 1. Se la massa di ogni elemento di un sistema materiale si moltiplica pel quadrato della sua distanza da una linea retta, la somma dei prodotti così formati si chiama il *momento d'inerzia* del sistema rispetto a quella linea.

Def. 2. Se M è la massa di un sistema, e $\varkappa$ è una tale quantità che $M\varkappa^2$ sia il momento d'inerzia rispetto ad una data linea retta, allora $\varkappa$ si chiama il *raggio di girazione* del sistema rispetto a quella linea.

Def. 3. Se due linee rette Ox, Oy si prendono come assi, e se la massa di ogni elemento del sistema si moltiplica per le sue *due* coordinate x, y, la somma dei prodotti si chiama il *prodotto d'inerzia* del sistema rispetto a quei due assi.

Sia un corpo riferito ad assi rettangolari qualunque, Ox, Oy, Oz, che s'incontrano in un punto O, e siano x, y, z le coordinate di un elemento qualunque m, allora, secondo queste definizioni, i momenti d'inerzia rispetto agli assi delle x, y, z rispettivamente saranno

$$\left.\begin{aligned} A &= \Sigma m\,(y^2 + z^2) \\ B &= \Sigma m\,(z^2 + x^2) \\ C &= \Sigma m\,(x^2 + y^2) \end{aligned}\right\},$$

ed i prodotti d'inerzia rispetto agli assi delle yz, zx, xy,

$$D = \Sigma m\,(yz)\ ,$$

$$E = \Sigma m\,(zx)\ ,$$

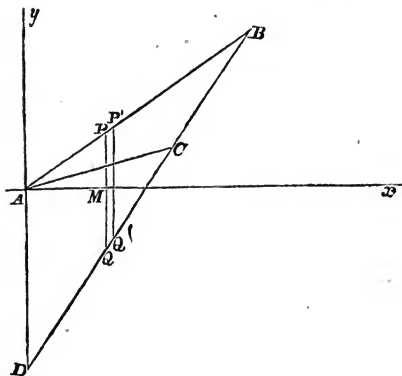
$$F = \Sigma m\,(xy)\,.$$

Da queste definizioni vediamo che i momenti d'inerzia A, B, C sono tali che due qualunque di essi sono insieme maggiori del terzo.

2. È chiaro che il procedimento per trovare i momenti ed i prodotti d'inerzia è semplicemente quello dell'integrazione. Possiamo illustrare ciò con l'esempio seguente.

Trovare il momento d'inerzia di una lamina triangolare uniforme rispetto ad un asse nel suo piano che passa per uno dei vertici.

Sia ABC il triangolo, Ay l'asse rispetto al quale si cerca il momento d'inerzia. Si tiri Ax perpendicolare ad Ay e si pro-

lunghi BC ad incontrare Ay in D. Il dato triangolo ABC si può riguardare come la differenza dei triangoli ABD, ACD. Troviamo prima il momento d'inerzia di ABD. Sia $PQP'Q'$ un'area elementare i di cui lati PQ, $P'Q'$ sono paralleli alla base AD e PQ tagli Ax in M. Sia β la distanza del vertice B dall'asse Ay, $AM = x$ ed $AD = l$.

Allora l'area elementare $PQP'Q'$ è chiaramente $l\dfrac{\beta - x}{\beta}dx$, ed il suo momento d'inerzia rispetto ad Ay è $l\dfrac{\beta - x}{\beta}dx \cdot x^2$. Quindi il momento d'inerzia del triangolo ABD

$$= \int_0^\beta l\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)x^2 dx = l\frac{\beta^3}{12}.$$

Similmente se γ è la distanza del vertice C dall'asse Ay, il momento d'inerzia del triangolo ACD è $l\frac{\gamma^3}{12}$. Quindi il momento d'inerzia del dato triangolo ABC è $\frac{l}{12}(\beta^3-\gamma^3)$.

Ora $\frac{1}{2}l\beta$ ed $\frac{1}{2}l\gamma$ sono le aree dei triangoli ABD, ACD. Quindi se Δ è l'area del triangolo ABC, il momento d'inerzia del triangolo rispetto all'asse Ay è

$$\frac{\Delta}{6}(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2).$$

3. Quando il corpo è una lamina il momento d'inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al suo piano è eguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto a due assi rettangolari qualunque nel suo piano condotti pel punto dove il primo asse incontra il piano.

Infatti si prenda l'asse delle z come la normale al piano, allora abbiamo se A, B, C sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi

$$A=\Sigma my^2, \quad B=\Sigma mx^2, \quad C=\Sigma m(x^2+y^2),$$

e quindi

$$C=A+B.$$

Possiamo applicare questo teorema al caso del triangolo. Siano β', γ' le distanze dei punti B, C dall'asse Ax. Allora il momento d'inerzia del triangolo rispetto alla normale al piano del triangolo condotta pel punto A è

$$=\frac{\Delta}{6}(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2+\beta'^2+\beta'\gamma'+\gamma'^2).$$

Questo si può ridurre alla forma più conveniente

$$=\frac{\Delta}{3}\left\{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2+AE^2\right\},$$

dove E è il punto medio di BC.

4. Nei capitoli seguenti di questo trattato vi sono alcuni momenti d'inerzia i quali s'incontrano così frequentemente che si troverà conveniente di riunirli insieme per richiamo. Il lettore farà bene perciò di mandare a memoria la tavola seguente.

Il momento d'inerzia di

(1) Un rettangolo i di cui lati sono $2a$ e $2b$ rispetto ad un asse pel suo centro nel suo piano perpendicolare al lato $2a$ $\Big\}=\text{massa}\,\frac{a^2}{3}$,

rispetto ad un asse pel suo centro perpendicolare al suo piano $\Big\} = \text{massa}\,\dfrac{a^2+b^2}{3}$,

(2) Un'ellisse di semiassi a e b

rispetto all'asse maggiore $a = \text{massa}\,\dfrac{b^2}{4}$,

. . . . asse minore $b = \text{massa}\,\dfrac{a^2}{4}$,

rispetto ad un asse perpendicolare al suo piano per il centro $\Big\} = \text{massa}\,\dfrac{a^2+b^2}{4}$.

Nel caso particolare di un circolo di raggio a, il momento di inerzia rispetto ad un diametro è massa $\dfrac{a^2}{4}$, e rispetto alla perpendicolare al suo piano per il centro massa $\dfrac{a^2}{2}$.

(3) Un ellissoide di semiassi a, b, c

rispetto all'asse $a = \text{massa}\,\dfrac{b^2+c^2}{5}$.

Nel caso particolare di una sfera di raggio a il momento d'inerzia rispetto ad un diametro $= \text{massa}\,\dfrac{2}{5}\,a^2$.

(4) Un solido retto i di cui lati sono $2a$, $2b$, $2c$

rispetto ad un asse pel suo centro perpendicolare al piano che contiene i lati b e c $\Big\} = \text{massa}\,\dfrac{b^2+c^2}{3}$.

5. Siccome il procedimento per determinare questi momenti d'inerzia è presso a poco lo stesso per tutti questi casi, sarà sufficiente di considerare solamente due esempii.

Determinare il momento d'inerzia di un'ellisse rispetto all'asse minore.

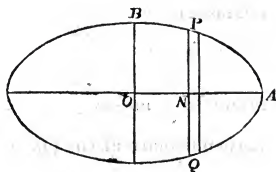
Sia l'equazione dell'ellisse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si prenda un'area elementare qualunque PQ parallela all'asse delle y, allora chiaramente il momento d'inerzia è

$$4\mu\int_0^a x^2 y\,dx = 4\mu\,\frac{b}{a}\int_0^a x^2\,\sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

in cui μ è la massa di un'unità di area.

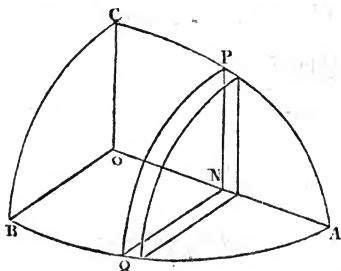
Per integrare questo, si ponga $x = a \operatorname{sen} \varphi$, allora l'integrale diviene

$$a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{8} \, d\varphi = \frac{\pi a^4}{16};$$

onde il momento d'inerzia $= \mu\pi ab \frac{a^2}{4} = \text{massa} \frac{a^2}{4}$.

Determinare il momento d'inerzia di un ellissoide rispetto ad un diametro principale.

Sia l'equazione dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si prenda un'area qualunque elementare PNQ parallela al

piano delle yz. Quest'area è evidentemente $\pi PN \cdot QN$. Ora PN è il valore di z quando $y=0$, e QN il valore di y quando $z=0$, come si ottengono dall'equazione dell'ellissoide;

onde $\qquad PN = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad QN = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$

quindi l'area dell'elemento $= \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2)$.

Sia μ la massa di un' unità di volume, allora l' intero momento d' inerzia

$$= \mu \int_{-a}^{a} \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2) \frac{PN^2 + QN^2}{4} dx$$

$$= \mu \frac{\pi}{4} \frac{bc}{a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \frac{b^2 + c^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx$$

$$= \mu \frac{4}{3} \pi a bc \frac{b^2 + c^2}{5}$$

$$= \text{massa} \frac{b^2 + c^2}{5}.$$

6. Se la massa di ogni elemento di un sistema materiale si moltiplica pel quadrato della sua distanza da un piano dato o da un punto dato, la somma dei prodotti così formati si chiama il momento d'inerzia del sistema rispetto a quel piano o a quel punto. Se il piano dato si prende per piano delle xy, allora seguendo la notazione dell' Art. 1, il momento d' inerzia rispetto al piano è Σmz^2. Se il punto dato si prende per origine, il momento d' inerzia rispetto a quel punto è Σmr^2.

Se A, B, C sono i momenti d' inerzia rispetto a tre assi qualunque che s'incontrano in un punto O, abbiamo per l' Art. 1,

$$A + B + C = 2\Sigma m(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$= 2\Sigma mr^2.$$

Quindi la somma dei momenti d' inerzia rispetto a tre assi rettangolari qualunque che s'incontrano in un punto dato è sempre la stessa ed eguale a due volte il momento d' inerzia rispetto a quel punto.

Se J è il momento d' inerzia rispetto al piano xy, ed I il momento d' inerzia rispetto all' asse delle z, abbiamo

$$I + J = \Sigma mr^2.$$

Sicchè la somma dei momenti d' inerzia di un sistema rispetto ad un piano qualunque condotto per un punto dato ed alla sua normale in quel punto è costante ed eguale al momento d' inerzia del sistema rispetto a quel punto.

7. È possibile di trovare con l' integrazione tutt' i momenti ed i prodotti d' inerzia, ma il procedimento si può semplificare con l'uso delle due proposizioni seguenti. I momenti d'inerzia di un corpo rispetto ad alcuni assi condotti pel suo centro di gravità, che possiamo prendere come assi delle coordinate, sono dati nella

tavola dell'Art. 4. Per trovare il momento d'inerzia rispetto ad ogni altro asse investigheremo

(1) un metodo per paragonare il richiesto momento d'inerzia con quello rispetto ad un asse parallelo condotto pel centro di gravità;

(2) un metodo per determinare il momento d'inerzia rispetto a questo asse parallelo in termini dei dati momenti d'inerzia rispetto agli assi delle coordinate.

8. Prop. *Dati i momenti ed i prodotti d'inerzia rispetto a tutti gli assi condotti per il centro di gravità di un corpo, dedurre i momenti ed i prodotti rispetto a tutti gli altri assi paralleli.*

Il momento d'inerzia di un corpo o di un sistema di corpi rispetto ad un asse qualunque è eguale al momento d'inerzia rispetto all'asse parallelo condotto per il centro di gravità più il momento d'inerzia dell'intera massa riunita nel centro di gravità rispetto all'asse primitivo.

Il prodotto d'inerzia rispetto a due assi qualunque è eguale al prodotto d'inerzia rispetto ai due assi paralleli condotti pel centro di gravità più il prodotto d'inerzia dell'intera massa riunita nel centro di gravità rispetto agli assi primitivi.

In primo luogo, si prenda l'asse rispetto al quale si cerca il momento d'inerzia come asse delle z. Sia m la massa di un elemento qualunque del corpo, che generalmente sarà un piccolo elemento.

Siano x, y, z le coordinate di m,

x', y', z' quelle del centro di gravità G dell'intero sistema di corpi,

x_1, y_1, z_1 quelle di m riferita ad un sistema di assi paralleli condotti pel centro di gravità.

Allora poichè $\frac{\Sigma m x_1}{\Sigma m}, \frac{\Sigma m y_1}{\Sigma m}, \frac{\Sigma m z_1}{\Sigma m}$

sono le coordinate del centro di gravità del sistema riferito al centro di gravità come origine, ne segue che

$$\Sigma m x_1 = 0, \quad \Sigma m y_1 = 0, \quad \Sigma m z_1 = 0.$$

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse delle z è

$$\begin{aligned} &= \Sigma m (x^2 + y^2), \\ &= \Sigma m \{ (x' + x_1)^2 + (y' + y_1)^2 \}, \\ &= \Sigma m (x'^2 + y'^2) + \Sigma m (x_1^2 + y_1^2), \\ &\qquad + 2x' \cdot \Sigma m x_1 + 2y' \cdot \Sigma m y_1. \end{aligned}$$

Ora $\Sigma m(x'^2+y'^2)$ è il momento d'inerzia di una massa Σm riunita nel centro di gravità, e $\Sigma m(x_1{}^2+y_1{}^2)$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse condotto per G, inoltre $\Sigma mx_1=0$, $\Sigma my_1=0$; quindi la proposizione è dimostrata.

In secondo luogo, si prendano gli assi delle x,y come gli assi rispetto ai quali si cerca il momento d'inerzia.

Il prodotto richiesto è

$$\begin{aligned}
&= \Sigma mxy \\
&= \Sigma m(x'+x_1)(y'+y_1), \\
&= x'y'\cdot\Sigma m + \Sigma m(x_1y_1) \\
&\qquad\qquad + x'\Sigma m y_1 + y'\Sigma m x_1 \\
&= x'\,y'\,\Sigma m + \Sigma m\, x_1 y_1.
\end{aligned}$$

Ora $x'y'\cdot\Sigma m$ è il prodotto d'inerzia di una massa Σm riunita in G e $\Sigma m x_1\, y_1$ è il prodotto dell'intero sistema rispetto ad assi condotti per G; quindi la proposizione è dimostrata.

9. Siano due assi paralleli A e B alle distanze a e b dal centro di gravità del corpo. Allora, se M è la massa del sistema materiale,

$$\left.\begin{matrix}\text{momento d'inerzia}\\ \text{rispetto ad } A\end{matrix}\right\} - Ma^2 = \left\{\begin{matrix}\text{momento d'inerzia}\\ \text{rispetto a } B\end{matrix}\right. - Mb^2.$$

Quindi allorchè si conosce il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse, si può trovare quello rispetto ad ogni altro asse parallelo. È chiaro che una simile proposizione vale per i prodotti d'inerzia.

10. La proposizione precedente si può generalizzare come segue. Sia un sistema qualunque in movimento, e siano x, y, z le coordinate al tempo t di un elemento qualunque di massa m, allora $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sono le velocità, e $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ le accelerazioni dell'elemento risolute parallelamente agli assi. Supponiamo che

$$V = \Sigma m\,\varphi\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2},\ y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2},\ z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

sia una data funzione dipendente dalla struttura e dal moto del sistema, la somma estendendosi a tutto il sistema. Inoltre sia φ una funzione algebrica del primo e del secondo ordine. Così φ

può essere formata di termini come

$$Ax^2 + Bx\frac{dy}{dt} + C\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + Eyz + Fx + \dots$$

dove A, B, C, etc. sono costanti. Allora ha luogo il seguente principio generale.

« Il valore di V per un sistema qualunque di coordinate è eguale al valore di V ottenuto per un sistema parallelo di coordinate col centro di gravità per origine più il valore di V per l'intera massa riunita nel centro di gravità rispetto al primo sistema di coordinate ».

Infatti siano x', y', z' le coordinate del centro di gravità, e sia $x=x'+x_1$, etc. onde $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{dx_1}{dt}$, etc. Ora poichè φ è una funzione algebrica del secondo ordine di x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$; y, etc. è evidente che facendo le suddette sostituzioni e sviluppando, il procedimento di elevare a quadrato etc. condurrà a tre gruppi di termini, quelli che contengono solamente x', $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{d^2x'}{dt^2}$, etc. quelli che contengono i prodotti di x', x_1, etc., e finalmente quelli che contengono solamente x_1, $\frac{dx_1}{dt}$, etc. Il primo di questi farà nell'insieme $\varphi\left(x', \frac{dx'}{dt}, \text{etc.}\right)$ e l'ultimo $\varphi\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}, \text{etc.}\right)$. Quindi abbiamo

$$V = \Sigma m\varphi\left(x', \frac{dx'}{dt}, \dots\right) + \Sigma m\varphi\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots\right)$$
$$+ \Sigma m\left(Ax'\frac{dx_1}{dt} + B\frac{dx'}{dt}x_1 + Cx'\frac{dy_1}{dt} + \dots\right),$$

dove A, B, C, etc. sono costanti.

Ora il termine $\Sigma m\left(x'\frac{dx_1}{dt}\right)$ è lo stesso che $x'\Sigma m\frac{dx_1}{dt}$, e questo svanisce. Infatti essendo $\Sigma mx_1 = 0$, ne segue che $\Sigma m\frac{dx_1}{dt} = 0$. Similmente tutti gli altri termini nella seconda linea svaniscono.

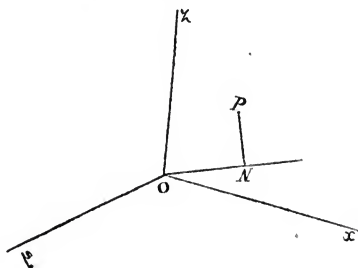
Quindi il valore di V si riduce a due termini. Ma il primo di questi è il valore di V all'origine per l'intera massa riunita nel centro di gravità, ed il secondo di questi è il valore di V per l'intero sistema riferito al centro di gravità come origine. Quindi la proposizione è dimostrata.

La proposizione sarebbe evidentemente vera se $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$, o altri coefficienti differenziali qualunque d'ordine più elevato si trovassero nella funzione V.

11. Prop. *Dati i momenti ed i prodotti d' inerzia rispetto a tre linee rette ad angoli retti che s' incontrano in un punto, dedurre i momenti ed i prodotti d' inerzia rispetto a tutti gli altri assi che passano per quel punto.*

Si prendano queste tre linee rette come assi delle coordinate. Siano A, B, C i momenti d'inerzia rispetto agli assi delle x,y,z; D, E, F i prodotti d'inerzia rispetto agli assi delle yz, zx, xy. Siano α, β, γ i coseni di direzione di una linea retta qualunque condotta per l'origine, allora il momento d'inerzia I del corpo rispetto a quella linea sarà dato dall'equazione

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Sia P un punto qualunque del corpo nel quale è situata una

massa m, e siano x, y, z le coordinate di P. Sia ON la linea di cui coseni di direzione sono α, β, γ, e si tiri PN perpendicolare ad ON.

Poichè ON è la proiezione di OP, essa è chiaramente

$$= x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

inoltre $$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ed $$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

Il momento d'inerzia I rispetto ad ON

$$= \Sigma m PN^2$$

$$= \Sigma m \{ x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \}$$

$$= \Sigma m \{ (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \}$$
$$= \Sigma m (y^2 + z^2)\alpha^2 + \Sigma m (z^2 + x^2)\beta^2 + \Sigma m (x^2 + y^2)\gamma^2$$
$$- 2\Sigma myz \cdot \beta\gamma - 2\Sigma mzx \cdot \gamma\alpha - 2\Sigma mxy \cdot \alpha\beta$$
$$= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

12. Questo risultato può essere esibito geometricamente. Un raggio vettore OQ si muova in modo qualunque intorno al punto dato O, e sia di tale lunghezza che il momento d'inerzia rispetto ad OQ sia proporzionale al quadrato inverso della lunghezza. Allora se R rappresenta la lunghezza del raggio vettore i di cui coseni di direzione sono $(\alpha\beta\gamma)$, abbiamo

$$I = \frac{\varepsilon^4}{R^2},$$

dove C è una costante introdotta per mantenere le dimensioni corrette, la massa essendo presa come unità. Quindi l'equazione polare del luogo di Q è

$$\frac{\varepsilon^4}{R^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2E\alpha\beta.$$

Trasformando in coordinate Cartesiane, abbiamo

$$\varepsilon^4 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY,$$

che è l'equazione di una quadrica. Così ad ogni punto O di un corpo materiale vi è una quadrica corrispondente la quale possiede la proprietà che il momento d'inerzia rispetto ad ogni raggio vettore è rappresentato dal quadrato inverso di quel raggio vettore. La convenienza di questa costruzione si è, che le relazioni tra i momenti d'inerzia rispetto alle linee rette che s'incontrano in un punto dato qualunque si possono scoprire per mezzo delle note proprietà di una quadrica. Questa quadrica si mostrerà essere un ellissoide, e si chiama l'ellissoide dei momenti.

13. *Se l'ellissoide dei momenti si riferisce ad un sistema qualunque di assi rettangolari i coefficienti di* $X^2, Y^2, Z^2, YZ, ZX, XY$ *nella sua equazione saranno i momenti ed i prodotti d'inerzia rispetto agli assi.*

Infatti sia l'equazione della superficie

$$P_1X^2 + P_2Y^2 + P_3Z^2 - 2Q_1YZ - 2Q_2ZX - 2Q_3XY = \varepsilon^4.$$

Trasformando in coordinate polari, abbiamo

$$\frac{\varepsilon^4}{R^2} = P_1\alpha^2 + P_2\beta^2 + P_3\gamma^2 - 2Q_1\beta\gamma - 2Q_2\gamma\alpha - 2Q_3\alpha\beta.$$

Paragoniamo questa con l'espressione generale del momento d'inerzia rispetto alla linea $(\alpha\beta\gamma)$ data nell'Art. 11. Allora poichè i due risultati debbono essere gli stessi per tutt'i valori di α, β, γ è chiaro che dobbiamo avere

$$P_1 = A, \quad P_2 = B, \quad P_3 = C,$$
$$Q_1 = D, \quad Q_2 = E, \quad Q_3 = F.$$

Se la superficie si riferisce ai suoi diametri principali come assi delle coordinate, la sua equazione sarà della forma

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = \varepsilon^4,$$

ed A, B, C saranno i momenti d'inerzia rispetto ai nuovi assi. Essendo A, B, C essenzialmente positivi, ne segue che la superficie è un ellissoide.

14. Quando tre linee rette ad angoli retti e che s'incontrano in un punto dato sono tali che prese per assi delle coordinate i prodotti

$$\Sigma mxy, \quad \Sigma myz, \quad \Sigma mzx$$

svaniscano tutti, queste rette si dicono gli Assi Principali nel dato punto.

I tre piani che passano per due qualunque degli assi principali si chiamano i Piani Principali nel dato punto.

I momenti d'inerzia rispetto agli assi principali in un punto qualunque si chiamano i Momenti Principali d'Inerzia in quel punto.

15. *In ogni punto di un sistema materiale vi sono sempre tre assi principali ad angoli retti tra loro.*

Si costruisca l'ellissoide dei momenti nel dato punto. Allora si è mostrato che i prodotti d'inerzia rispetto agli assi sono le metà dei coefficienti di XY, YZ, ZX nell'equazione dell'ellissoide dei momenti riferito a queste linee rette come assi delle coordinate. Ora se un ellissoide si riferisce ai suoi diametri principali come assi, questi coefficienti svaniscono. Quindi i diametri principali dell'ellissoide *sono* gli assi principali del sistema. Ma ogni ellissoide ha almeno tre diametri principali, quindi ogni sistema materiale ha almeno tre assi principali.

Se A, B, C sono i tre momenti principali d'inerzia in un punto qualunque, l'espressione data nell'Art. 11 per il momento d'inerzia rispetto ad ogni altra linea diviene

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

16. Le posizioni degli assi principali in varii punti di un corpo si possono trovare ancora con un esame particolare.

Così gli assi principali di un ellissoide nel centro di gravità sono i suoi diametri principali. Si prendano questi come assi, allora la somma $\Sigma mxy=0$. Infatti se si prende un elemento qualunque m di cui due delle coordinate sono x, y, si può trovare un altro elemento m, di eguale massa, di cui le coordinate corrispondenti sono $-x$, y. Quindi la somma precedente per l'intero corpo è zero. Similmente $\Sigma myz=0$, $\Sigma mzx=0$, e queste, per l'Art. 14, sono le condizioni affinchè i diametri siano gli assi principali nel centro.

Così ancora gli assi principali nel centro di un'ellisse sono i due diametri principali ed una normale al piano dell'ellisse.

Se il corpo è una lamina, uno degli assi principali in un punto qualunque O è la normale al piano della lamina. Infatti si prendano come assi delle x, y due direzioni rettangolari qualunque Ox, Oy nel piano della lamina, e sia Oz normale. Allora poichè ogni elemento giace nel piano delle xy abbiamo $\Sigma mxz=0$, $\Sigma myz=0$, e quindi l'equazione dell'ellissoide dei momenti è

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DXY=\varepsilon^4.$$

È chiaro dalla forma dell'equazione che l'asse delle z è un diametro principale della superficie.

Con la considerazione di alcune semplici proprietà dell'ellissoide, le seguenti proposizioni si rendono evidenti:

I. Dei momenti d'inerzia di un corpo rispetto agli assi che si incontrano in un punto dato, il momento d'inerzia rispetto ad uno degli assi principali è il massimo, e rispetto ad un altro il minimo.

Infatti, nell'ellissoide dei momenti, il momento d'inerzia rispetto ad un raggio vettore qualunque dal centro è minimo quando quel raggio vettore è massimo e viceversa. Ed è evidente che il massimo ed il minimo dei raggi vettori sono due dei diametri principali.

II. Se i tre momenti principali in un punto O sono eguali tra loro, l'ellissoide diviene una sfera. Ogni diametro è allora un diametro principale, ed i raggi vettori sono tutti eguali. Quindi ogni linea retta condotta per O è un asse principale in O, ed i momenti d'inerzia rispetto ad essi sono tutti eguali.

Per esempio, le perpendicolari dal centro di gravità di un cubo sulle tre facce sono assi principali; infatti, il corpo essendo ri-

ferito ad esse come assi, abbiamo chiaramente $\Sigma mxy=0$, $\Sigma myz=0$, $\Sigma mzx=0$. Inoltre i tre momenti d'inerzia rispetto ad essi sono per simmetria eguali. Quindi ogni asse pel centro di gravità di un cubo è un asse principale, ed i momenti d'inerzia rispetto ad essi sono tutti eguali.

In secondo luogo supponiamo che il corpo sia una piramide regolare. Si considerino due piani condotti pel centro di gravità ciascuno parallelo ad una faccia della piramide. Le relazioni di questi due piani alla piramide sono in tutt'i rispetti le stesse. Quindi ancora l'ellissoide dei momenti nel centro di gravità deve essere situato similmente rispetto a ciascuno di questi piani, e lo stesso è vero per i piani paralleli a tutte le facce. Quindi l'ellissoide deve essere una sfera ed il momento d'inerzia sarà lo stesso rispetto ad ogni asse.

17. *Trovare i momenti ed i prodotti d'inerzia di un triangolo rispetto ad assi qualunque.*

Se β e γ sono le distanze dei vertici B, C di un triangolo ABC da una linea retta qualunque AX condotta dal vertice A, nel piano del triangolo, è noto che il momento d'inerzia del triangolo rispetto ad AX è

$$\frac{\Delta}{6}(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2),\ \text{dove } \Delta \text{ è l'area del triangolo.}$$

Tre elementi eguali, la massa di ciascuno essendo $\frac{\Delta}{3}$, siano situati nei punti medii dei tre lati. Allora si vede facilmente, che il momento d'inerzia dei tre elementi rispetto ad AX è lo stesso di quello del triangolo. I tre elementi considerati come un sistema, ed il triangolo, hanno lo stesso centro di gravità. Si chiami questo punto O. Si tiri la linea retta OX' pel centro comune di gravità O parallela ad AX, allora è evidente che i momenti d'inerzia dei due sistemi rispetto ad OX' sono anche eguali.

Poichè questa eguaglianza esiste per tutte le linee rette condotte per O nel piano del triangolo, sarà vera per due linee rette OX', OY' ad angoli retti, e quindi anche per una linea retta OZ' perpendicolare al piano del triangolo.

Uno degli assi principali in O del triangolo, e del sistema dei tre elementi è normale al piano, e quindi lo stesso per i due sistemi. Gli assi principali in O nel piano, sono quelle due linee rette rispetto alle quali i momenti d'inerzia sono massimo e minimo, e quindi per quel che precede questi assi sono gli stessi

per i due sistemi. Se in un punto due sistemi hanno gli stessi assi principali e momenti principali, essi hanno anche gli stessi momenti d'inerzia rispetto a tutti gli assi che passano per quel punto, e gli stessi prodotti d'inerzia rispetto a due linee rette qualunque che s'incontrano in quel punto. E se questo punto è il centro di gravità dei due sistemi, la stessa cosa sarà ancora vera per ogni altro punto.

Se quindi un elemento di cui la massa è un terzo di quella del triangolo è situato nel punto medio di ciascun lato, il momento d'inerzia del triangolo rispetto ad una linea retta qualunque, è lo stesso di quello del sistema di elementi, ed il prodotto d'inerzia rispetto a due linee rette qualunque che s'incontrano, è lo stesso di quello del sistema di elementi rispetto alle stesse linee rette.

Tre punti D, E, F si possono sempre trovare tali che i prodotti ed i momenti d'inerzia di tre elementi eguali situati in D, E, F, siano gli stessi dei prodotti e dei momenti d'inerzia di ogni area piana. Infatti sia O il centro di gravità dell'area, Ox, Oy siano gli assi principali in O nel piano dell'area, ed $M\alpha^2$, $M\beta^2$ i momenti d'inerzia rispetto a questi assi.

Siano (xy), $(x'y')$, $(x''y'')$ le coordinate di D, E, F, m la massa di un elemento, sicchè $M=3m$. Allora dobbiamo avere

$$m\,(x^2 + x'^2 + x''^2) = M\beta^2,$$

$$m\,(y^2 + y'^2 + y''^2) = M\alpha^2,$$

$$xy + x'y' + x''y'' = 0.$$

Inoltre, poichè i due sistemi debbono avere lo stesso centro di gravità

$$x + x' + x'' = 0,$$

$$y + y' + y'' = 0.$$

Eliminando $x'y'$, $x''y''$ da queste equazioni, abbiamo

$$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 = \frac{2}{3}\frac{M}{m}\cdot\alpha^2\beta^2,$$

$$= 2\alpha^2\beta^2,$$

che è l'equazione di un'ellisse dei momenti. Ne segue facilmente, che D si può prendere dove si vuole su questa ellisse, ed E

e F sono nelle estremità opposte di quella corda che è bisegata in un punto N dal raggio prolungato DO, così che $ON = \frac{1}{2} OD$.

L'ellissoide dei momenti nel centro di gravità di un triangolo si può trovare come segue.

Sia inscritta nel triangolo un'ellisse che tocca due dei lati AB, BC nei loro punti medii F, D. Allora, pel teorema di Carnot, essa tocca il terzo lato CA nel suo punto medio E. Poichè DF è parallela a CA la tangente in E, la linea retta che congiunge E al punto di mezzo N di DF passa pel centro, e quindi il centro della conica è il centro di gravità del triangolo.

Questa conica si può mostrare che è l'ellisse dei momenti del triangolo in O. Per dimostrare ciò, troviamo il momento d'inerzia del triangolo rispetto ad OE. Sia $OE=r$, e sia il semidiametro coniugato r', ed ω l'angolo tra r ed r'. Ora $ON = \frac{1}{2} r$, e quindi dall'equazione dell'ellisse

$$FN^2 = \frac{3}{4} r'^2,$$

onde momento d'inerzia rispetto ad OE

$$= \frac{2}{3} \Delta \cdot \frac{3}{4} r'^2 \operatorname{sen}^2 \omega,$$

$$= \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{\Delta'^2}{\pi^2 r^2};$$

dove Δ' è l'area dell'ellisse, sicchè i momenti d'inerzia del sistema rispetto ad OE, OF, OD sono inversamente proporzionali ad OE^2, OF^2, OD^2. Se prendiamo un'ellisse dei momenti delle giuste dimensioni, essa intersegherà la conica inscritta in E, F, e D, e perciò anche negli estremi opposti di questi diametri. Ma due coniche non possono intersegarsi in sei punti a meno che non siano identiche. Quindi questa conica è l'ellisse dei momenti in O del triangolo.

La normale in O al piano del triangolo è un asse principale del triangolo (Art. 16). Quindi l'ellissoide dei momenti del triangolo ha la conica inscritta per una sezione principale. Se a e b sono le lunghezze degli assi di questa conica, c quella dell'asse dell'ellissoide che è perpendicolare al piano della lamina, abbiamo per gli Art. 3 e 12.

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Se il triangolo è equilatero, l'ellissoide dei momenti diviene uno sferoide, ed ogni asse condotto pel centro di gravità nel piano del triangolo è un asse principale.

18. *Trovare i momenti ed i prodotti d'inerzia di un tetraedro rispetto ad assi qualunque.*

Sia $ABCD$ il tetraedro. Per un vertice D si tiri un piano qualunque e sia preso per piano delle xy. Sia D l'area della base ABC; α, β, γ siano le distanze dei suoi vertici dal piano delle xy, e p la lunghezza della perpendicolare da D sulla base ABC.

Sia PQR una sezione qualunque parallela alla base ABC e di spessezza du, dove u è la perpendicolare da D sopra PQR. Il momento d'inerzia del triangolo PQR rispetto al *piano* delle xy è lo stesso di quello di tre elementi eguali, ciascuno un terzo della sua massa, situati nei punti medii dei suoi lati. Il volume dell'elemento $PQR = \frac{u^2}{p^2} Ddu$. Le ordinate dei punti medii dei lati AB, BC, CA, sono rispettivamente $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$. Quindi, per i triangoli simili, le coordinate dei punti medii di PQ, QR, RP sono anche

$$\frac{\beta+\gamma}{2}\frac{u}{p},\quad \frac{\gamma+\alpha}{2}\frac{u}{p},\quad \frac{\alpha+\beta}{2}\frac{u}{p}.$$

Il momento d'inerzia del triangolo PQR rispetto al piano xy è quindi

$$=\frac{1}{3}\frac{u^2}{p^2}D\,du\left\{\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\frac{u}{p}\right)^2+\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\frac{u}{p}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\frac{u}{p}\right)^2\right\}.$$

Integrando da $u=0$ ad $u=p$, abbiamo il momento d'inerzia del tetraedro rispetto al piano xy

$$=\frac{V}{10}\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\},$$

dove V è il volume.

Se quattro quinti della massa del tetraedro fossero riuniti in un elemento e situati nel centro di gravità del tetraedro, ed un ventesimo in ciascuno dei vertici, il momento d'inerzia di questi cinque elementi rispetto al piano delle xy sarebbe

$$=V\frac{4}{5}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\right)^2+\frac{V}{20}\alpha^2+\frac{V}{20}\beta^2+\frac{V}{20}\gamma^2,$$

che è lo stesso di quello del tetraedro.

Il centro di gravità di questi cinque elementi è il centro di gravità del tetraedro, ed essi insieme fanno la massa del tetraedro. Quindi, per l'Art. 8, i momenti d'inerzia dei due sistemi rispetto ad un piano qualunque condotto pel centro di gravità sono gli stessi, e per lo stesso articolo questa eguaglianza esisterà per qualunque piano. Ne segue per l'Art. 6, che i momenti d'inerzia rispetto ad una linea retta qualunque sono anche eguali. I due sistemi hanno perciò gli stessi ellissoidi dei momenti nel centro comune di gravità. Quindi ancora, per l'Art. 13, i prodotti d'inerzia rispetto a due linee rette qualunque sono eguali.

19. La superficie reciproca dell'ellissoide dei momenti è un altro ellissoide, che si chiama l'Ellissoide di Girazione. Questa seconda superficie è stata anche adoperata per rappresentare, geometricamente, la posizione degli assi principali ed il momento d'inerzia rispetto ad una linea retta qualunque.

Mostrare che la superficie reciproca dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

è l'ellissoide

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=\varepsilon^4.$$

Sia ON la perpendicolare dall'origine O sul piano tangente in un punto qualunque P del primo ellissoide, e siano l, m, n i coseni di direzione di ON, allora

$$ON^2=a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2.$$

Si prolunghi ON in Q così che $OQ=\frac{\varepsilon^2}{ON}$, allora Q è un punto della superficie reciproca. Sia $OQ=R$; onde

$$\frac{\varepsilon^4}{R^2}=a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2.$$

Cambiando questa in coordinate rettangolari, abbiamo

$$\varepsilon^4=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

Ne segue, perciò, che i diametri principali dell'ellissoide di girazione sono gli assi principali del corpo, ed il momento d'inerzia rispetto alla perpendicolare su di un piano tangente qualunque è misurato dal quadrato di quella perpendicolare.

Se A, B, C sono i momenti principali nel centro di gravità, l'equazione dell'ellissoide di girazione è

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}+\frac{Z^2}{C}=1.$$

Si può mostrare che l'equazione generale di questo ellissoide riferito ad un sistema qualunque di assi rettangolari è

$$\begin{vmatrix} A, & -F, & -E, & X \\ -F, & B, & -D, & Y \\ -E, & -D, & C, & Z \\ X, & Y, & Z, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dove A, B, C, D, E, F sono i momenti ed i prodotti d'inerzia rispetto agli assi delle coordinate.

20. Vi è un terzo ellissoide che è alle volte usato. Per gli Art. 6 ed 11 il momento d'inerzia rispetto ad un piano di cui i coseni di direzione sono (α, β, γ) è

$$\begin{aligned} J &= \frac{A+B+C}{2} - A\alpha^2 - B\beta^2 - C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta \\ &= \Sigma m x^2 \cdot \alpha^2 + \Sigma m y^2 \cdot \beta^2 + \Sigma m z^2 \cdot \gamma^2 \\ &\qquad + 2\Sigma m yz \cdot \beta\gamma + 2\Sigma m zx \cdot \gamma\alpha + 2\Sigma m xy \cdot \alpha\beta, \end{aligned}$$

se seguiamo la notazione dell'Art. 1.

Quindi, come nell'Art. 12, possiamo costruire l'ellissoide

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma m x^2 \cdot X^2 + \Sigma m y^2 \cdot Y^2 + \Sigma m z^2 \cdot Z^2 \\ &+ 2\Sigma m yz \cdot YZ + 2\Sigma m zx \cdot ZX + 2\Sigma m xy \cdot XY \end{aligned}\right\} = \varepsilon^4,$$

dove la massa è stata presa per unità. Allora il momento d'inerzia rispetto ad un piano qualunque condotto pel centro dell'ellissoide è rappresentato dal quadrato inverso del raggio vettore perpendicolare a quel piano.

Se paragoniamo l'equazione dell'ellissoide dei momenti con quella di questo terzo ellissoide, vediamo che l'una si può ottenere dall'altra sottraendo la stessa quantità da ciascuno dei coefficienti di X^2, Y^2, Z^2. Quindi i due ellissoidi hanno le loro sezioni circolari coincidenti in direzione.

Questo ellissoide si può anche adoperare per trovare i momenti d'inerzia rispetto ad una linea retta qualunque condotta

per l'origine. Infatti possiamo dedurre dall'Art. 6 che il momento d'inerzia rispetto ad un raggio vettore qualunque è rappresentato dalla differenza tra il quadrato inverso di quel raggio vettore e la somma dei quadrati inversi dei semiassi.

Del reciproco di questo ellissoide si è fatto anche uso. Tutti questi ellissoidi hanno i loro diametri principali coincidenti in direzione, ed ognuno di essi può essere adoperato per determinare le direzioni degli assi principali in un punto qualunque.

21. *Una linea retta passa per un punto fisso* O *e si muove intorno ad esso in modo tale che il momento d'inerzia rispetto alla linea è sempre lo stesso ed eguale ad una data quantità* I. *Trovare l'equazione del cono generato dalla linea retta.*

Si prendano per assi delle coordinate gli assi principali in O, e siano (α,β,γ) i coseni di direzione della linea retta in una posizione qualunque. Allora per l'Art. 15 abbiamo

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = I.$$

Quindi l'equazione del luogo è

$$(A-I)\,\alpha^2 + (B-I)\,\beta^2 + (C-I)\,\gamma^2 = 0,$$

o, trasformando in coordinate Cartesiane,

$$(A-I)\,x^2 + (B-I)\,y^2 + (C-I)\,z^2 = 0.$$

Apparisce da questa equazione che i diametri principali del cono sono gli assi principali del corpo nel punto dato.

La quantità data I deve essere minore del massimo e maggiore del minimo dei momenti A, B, C. Siano A, B, C disposti in ordine decrescente di grandezza; allora se I è minore di B, il cono ha la sua concavità rivolta verso l'asse C, se I è maggiore di B la concavità è rivolta verso l'asse A, se $A=B$ il cono si riduce a due piani che coincidono con le sezioni circolari centrali dell'ellissoide dei momenti nel punto O.

La particolarità geometrica di questo cono si è che le sue sezioni circolari in tutt'i casi coincidono in direzione con le sezioni circolari dell'ellissoide dei momenti il di cui centro è nel vertice.

Questo cono si chiama un cono di eguali momenti pel punto nel quale è situato il suo vertice.

22. Le proprietà dei prodotti d'inerzia di un corpo rispetto a diverse coppie di assi non sono così utili da richiedere una completa discussione. I teoremi seguenti serviranno come esercizii.

(1) Essendo dato un punto qualunque O ed un piano qualunque condotto per esso, si possono sempre trovare due linee rette ad angoli retti Ox, Oy tali che il prodotto d'inerzia rispetto a queste linee sia zero.

Queste sono gli assi della sezione dell'ellissoide dei momenti nel punto O formata dal piano dato.

(2) Se si prendono nello stesso piano due altre linee rette ad angoli retti Ox', Oy' che formano un angolo θ misurato nella direzione positiva con Ox, Oy rispettivamente, allora il prodotto d'inerzia F' rispetto ad Ox', Oy' è dato dall'equazione

$$F' = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\,(A-B),$$

dove A, B sono i momenti d'inerzia rispetto ad Ox, Oy.

(3) Se I è il momento d'inerzia rispetto ad una linea qualunque in questo piano che fa un angolo θ con Ox, allora

$$I = A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}^2\theta.$$

Infatti la sezione dell'ellissoide dei momenti col piano è l'ellisse che ha per equazione

$$Ax^2 + By^2 = \varepsilon^4,$$

onde la proprietà segue immediatamente.

(4) Siano $(\lambda\mu\nu)$, $(\lambda'\mu'\nu')$ i coseni di direzione di due linee rette Ox', Oy' ad angoli retti che passano per l'origine O e riferite agli assi principali in O come assi delle coordinate. Allora il prodotto d'inerzia rispetto a queste linee è

$$F' = \lambda\lambda'\,\Sigma mx^2 + \mu\mu'\,\Sigma my^2 + \nu\nu'\,\Sigma mz^2.$$

Infatti siano $(x'y'z')$ le coordinate di un punto qualunque (xyz) riferito ad Ox', Oy' e ad una terza linea Oz' come nuovi assi delle coordinate. Allora

$$x' = \lambda x + \mu y + \nu z, \quad \text{ed} \quad y' = \lambda' x + \mu' y + \nu' z.$$

Quindi, essendo $F'=\Sigma mx'y'$, il teorema ne segue con la semplice moltiplicazione.

Poichè $\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'=0$, abbiamo

$$-F' = A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + C\nu\nu'.$$

(5) Se $(\lambda\mu\nu)$ sono i coseni di direzione di un asse Ox', allora i coseni di direzione $(\lambda'\mu'\nu')$ di un altro asse Oy' ad angoli retti

tale che il prodotto d'inerzia rispetto ad Ox', Oy' sia zero, sono dati dalle equazioni

$$\frac{\lambda'}{(B-C)\,\mu\nu}=\frac{\mu'}{(C-A)\,\nu\lambda}=\frac{\nu'}{(A-B)\,\lambda\mu}.$$

Infatti da (4) le equazioni per trovare $\lambda'\mu'\nu'$ sono

$$\left.\begin{aligned} A\lambda\lambda'+B\mu\mu'+C\nu\nu'&=0,\\ \lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'&=0, \end{aligned}\right\}$$

dalle quali segue il teorema con la moltiplicazione in croce.

Da (1) questo è equivalente al teorema geometrico. Dato un raggio vettore Ox' di un ellissoide, trovare un altro raggio vettore Oy' tale che Ox', Oy' siano diametri principali della sezione $x'Oy'$.

(6). Siano (lmn) i coseni di direzione di una data linea retta qualunque Oz', e siano D', E' i prodotti d'inerzia rispetto ad Oz', Oy'; Oz', Ox', dove Ox', Oy' sono due linee rette qualunque ad angoli retti. Allora girando Ox', Oy' intorno ad Oz', $D'^2+E'^2$ è costante, e

$$D'^2+E'^2=(A-B)^2(lm)^2+(B-C)^2(mn)^2+(C-A)^2(nl)^2.$$

Infatti da (4),

$$-D'=Al\lambda+Bm\mu+Cn\nu,$$

$$-E'=Al\lambda'+Bm\mu'+Cn\nu';$$

onde $$D'^2+E'^2=A^2l^2(\lambda^2+\lambda'^2)+2ABlm(\lambda\mu+\lambda'\mu')+\text{etc.}$$

Ma $$\left.\begin{aligned} \lambda^2+\lambda'^2&=1-l^2=m^2+n^2,\\ \lambda\mu+\lambda'\mu'&=-lm, \end{aligned}\right\}$$

onde con la sostituzione il teorema ne segue immediatamente.

(7) Se A', B' sono i momenti d'inerzia rispetto ad Ox', Oy', allora girando Ox', Oy' intorno ad Oz', il valore di $A'B'-F'^2$ è costante, ed

$$A'B'-F'^2=BCl^2+CAm^2+ABn^2.$$

ESEMPII.

1. Il momento d'inerzia di un arco di un circolo il di cui raggio è a e che sottende un angolo 2α al centro

(a) rispetto ad un asse pel suo centro perpendicolare al suo piano $=Ma^2$,

(b) rispetto ad un asse pel suo punto medio perpendicolare al [illegible]piano $=2M\left(1-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)a^2$,

(c) rispetto al diametro che bisega l'arco

$$=M\left(1-\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2\alpha}\right)\frac{a^2}{2}.$$

2. Il momento d'inerzia della superficie di un emisfero di raggio a e di massa M rispetto al diametro perpendicolare alla base è $M\frac{2a^2}{3}$.

3. Se ciascun elemento dell'area di un triangolo ABC si moltiplica per l'n^{ma} potenza della sua distanza da una linea retta condotta per un vertice A, allora la somma dei prodotti è

$$\frac{2\Delta}{(n+1)(n+2)}\,\frac{\beta^{n+1}-\gamma^{n+1}}{\beta-\gamma},$$

dove β, γ sono le distanze dei vertici B, C dalla linea retta che passa pel vertice A, e Δ è l'area del triangolo.

4. Il momento d'inerzia di un cono retto di massa M rispetto all'asse è $M\frac{3}{10}b^2$. Quello rispetto ad una linea retta condotta pel vertice perpendicolarmente all'asse è $M\frac{3}{5}\left(a^2+\frac{b^2}{4}\right)$, e rispetto ad un lato $M\frac{3}{20}\,\frac{6a^2+b^2}{a^2+b^2}b^2$, dove a è l'altezza del cono e b il raggio della base.

5. Il momento d'inerzia della parte dell'area di una parabola tagliata da un'ordinata qualunque alla distanza x dal vertice è $M\frac{3}{7}x^2$ rispetto alla tangente nel vertice, ed $M\frac{y^2}{5}$ rispetto al diametro principale, dove y è l'ordinata corrispondente ad x.

6. Il momento d'inerzia dell'area della lemniscata $r^2=a^2\cos 2\theta$ rispetto ad una linea condotta per l'origine nel suo piano e perpendicolare al suo asse è $M\frac{3\pi+8}{48}a^2$.

7. Il momento d'inerzia di un triangolo rispetto ad una linea perpendicolare al suo piano pel suo centro di gravità è $\frac{M}{35}(a^2+b^2+c^2)$, dove a, b, c sono i lati del triangolo.

8. Il momento d'inerzia di un'area ellittica rispetto ad un diametro qualunque di cui la lunghezza è $2r$ è $\frac{a^2b^2}{4r^2}$. L'ellisse dei momenti nel centro di gravità dell'area e che giace nel suo piano è l'ellisse stessa.

9. Se $k_1 k_2$ sono i raggi di girazione di una lamina ellittica rispetto a due diametri coniugati qualunque

$$\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} = 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

10. Tre elementi ciascuno un sesto della massa di un'area ellittica siano situati uno in una estremità dell'asse maggiore e gli altri due nelle estremità dell'ordinata che bisega il semiasse maggiore, ed un quarto elemento la di cui massa è la metà di quella dell'area sia situato nel centro di gravità. Allora i momenti ed i prodotti d'inerzia del sistema dei quattro elementi e dell'area ellittica sono gli stessi per qualunque asse.

11. Trovare il momento d'inerzia di un ellissoide eterogeneo rispetto all'asse maggiore; gli strati di eguale densità essendo ellissoidi simili concentrici, e la densità lungo l'asse maggiore variando come la distanza dal centro. Il risultato è $M\frac{2}{9}(b^2+c^2)$.

12. Trovare il momento d'inerzia di un'ellisse eterogenea rispetto all'asse minore, gli strati di eguale densità essendo ellissi omofocali, e la densità lungo l'asse minore variando come la distanza dal centro. Il risultato è

$$\frac{3M}{20}\frac{(a^5-c^5)-5a^3(a^2-c^2)}{(a^3-c^3)-3a(a^2-c^2)},$$

dove a è il semiasse maggiore, e c la metà della distanza tra i fuochi.

13. Ogni prodotto d'inerzia come D non può numericamente essere tanto grande quanto $\frac{A}{2}$.

14. Se A, B, F sono i momenti ed il prodotto d'inerzia di una lamina rispetto a due assi rettangolari qualunque nel suo piano, dimostrare che AB è maggiore di F^2.

15. Se ABC, DEF sono i momenti ed i prodotti d'inerzia rispetto ad assi rettangolari qualunque che s'incontrano in un

punto O, dimostrare che

$$(A + B - C)(B + C - A) > 4E^2,$$

$$(A + B - C)(B + C - A)(C + A - B) > 8DEF.$$

16. Una lamina è limitata da quattro iperboli rettangolari, due di esse hanno gli assi delle coordinate per asintoti, e le altre due hanno gli assi per diametri principali. Dimostrare che la somma dei momenti d'inerzia della lamina rispetto agli assi coordinati è

$$\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha'^2)(\beta^2 - \beta'^2),$$

dove $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ sono i semiassi delle iperboli.

17. Una lamina è limitata in due lati da due ellissi simili, il rapporto degli assi in ciascuna essendo m, e negli altri due lati da due iperboli rettangolari, il rapporto degli assi in ciascuna essendo n. Queste quattro curve hanno i loro diametri principali secondo gli assi delle coordinate. Dimostrare che il prodotto d'inerzia rispetto agli assi coordinati è $\dfrac{(\alpha^2 - \alpha'^2)(\beta^2 - \beta'^2)}{8(m^2 + n^2)}$, dove $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ sono i semiassi maggiori delle curve.

18. Se due figure piane hanno la stessa ellisse dei momenti nel loro centro di gravità, accadrà lo stesso per le loro proiezioni.

Dedurre da ciò che l'ellisse dei momenti di un triangolo è l'ellisse che tocca i lati nei loro punti di mezzo.

Sezione II. *Sulle Posizioni degli Assi Principali di un Sistema.*

23. Prop. *Essendo data una linea retta si cerca di trovare in qual punto della sua lunghezza essa è un asse principale del sistema, e se un tal punto esiste trovare gli altri due assi principali in quel punto.*

Si prenda la linea retta come asse delle z, ed un punto qualunque O in essa come origine. Sia C il punto nel quale essa è un asse principale, e siano Cx', Cy' gli altri due assi principali.

Sia $CO = h$, θ = angolo tra Cx' ed Ox. Allora

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\theta \\ y' &= -x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta \\ z' &= z - h \end{aligned}\right\}.$$

Quindi
$$\left.\begin{aligned}\Sigma m x'z' = \cos\theta\, \Sigma mxz + \operatorname{sen}\theta\, \Sigma myz \\ - h\,(\cos\theta\, \Sigma mx + \operatorname{sen}\theta\, \Sigma my)\end{aligned}\right\} = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m y'z' = -\operatorname{sen}\theta\, \Sigma mxz + \cos\theta\, \Sigma myz \\ - h\,(-\operatorname{sen}\theta\, \Sigma mx + \cos\theta\, \Sigma my)\end{aligned}\right\} = 0 \ldots\ldots (2)$$

$$\Sigma m x'y' = \Sigma m\,(y^2 - x^2)\,\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2} + \Sigma mxy \cos 2\theta = 0 \ldots\ldots (3)$$

L'ultima equazione mostra che

$$\tan 2\theta = \frac{2\Sigma mxy}{\Sigma m\,(x^2 - y^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$= \frac{2F}{B - A},$$

secondo la notazione precedente.

Le equazioni (1) e (2) debbono essere soddisfatte dallo stesso valore di h. Questo dà come condizione affinchè l'asse delle z sia un asse principale in un punto della sua lunghezza,

$$\Sigma mxz\, \Sigma my = \Sigma myz\, \Sigma mx.$$

Sostituendo in (1) abbiamo

$$h = \frac{\Sigma myz}{\Sigma my} = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

L'equazione (5) esprime la condizione affinchè l'asse delle z sia un asse principale in un punto della sua lunghezza; ed il valore di h dà la posizione di questo punto. Le posizioni degli altri due assi principali si possono allora trovare con l'equazione (4).

Per determinare il significato geometrico di questa condizione, si faccia passare il piano delle xz per il centro di gravità del corpo. Allora abbiamo $\Sigma my = 0$, e l'equazione diviene

$$\Sigma mx\, \Sigma myz = 0.$$

Uno di questi fattori deve essere zero. Affinchè h sia finito, dobbiamo avere $\Sigma myz = 0$. Si costruisca l'ellissoide dei momenti nel centro di gravità. Per l'Art. 12 la sua equazione riferita ad assi delle coordinate paralleli a Cx, Cy, Cz, è

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2EZX - 2FXY = \varepsilon^4,$$

secondo la notazione precedente. Il coefficiente D di YZ è zero, poichè per l'Art. 8

$$\Sigma myz = D + \Sigma m \cdot y'z',$$

L'equazione di una sezione parallela al piano yz è

$$BY^2 + CZ^2 = \varepsilon^4,$$

che è un'ellisse riferita ai suoi diametri principali come assi. Quindi, affinchè una linea retta sia un asse principale in un punto non infinitamente lontano, essa deve essere parallela ad uno dei diametri principali della sezione dell'ellissoide dei momenti nel centro di gravità, fatta da un piano perpendicolare al piano che contiene l'asse ed il centro di gravità.

Se $\Sigma mxz = 0$ e $\Sigma myz = 0$, le equazioni (1) e (2) sono entrambe soddisfatte da $h=0$. Queste sono perciò le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'asse delle z sia un asse principale nell'origine.

Se il sistema è una lamina piana e l'asse delle z è una normale al piano in un punto qualunque, abbiamo $z = 0$. Quindi le condizioni $\Sigma mxz=0$ e $\Sigma myz=0$ sono soddisfatte. Perciò uno degli assi principali in un punto qualunque di una lamina è la normale al piano in quel punto.

Nel caso di una superficie di rotazione limitata da piani perpendicolare all'asse, l'asse è un asse principale in ogni punto della sua lunghezza.

Ancora l'equazione (4) ci abilita, quando è dato un asse principale, a trovare gli altri due. Se $\theta=\alpha$ è il primo valore di θ, tutti gli altri sono inclusi in $\theta=\alpha+n\frac{\pi}{2}$; quindi tutti questi valori danno solamente gli stessi assi sovrapposti.

24. Poichè (4) non contiene h, apparisce che se l'asse delle z è un asse principale in più di un punto, gli assi principali in quei punti sono paralleli. Ancora, in quel caso (5) deve essere soddisfatta da più di un valore di h. Ma siccome h entra solamente alla prima potenza, ciò non può accadere a meno che non sia

$$\Sigma mx = 0, \qquad \Sigma my = 0,$$

$$\Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0;$$

sicchè l'asse deve passare pel centro di gravità ed essere un asse principale nell'origine, e perciò (essendo l'origine arbitraria) un asse principale in ogni punto della sua lunghezza.

Se gli assi principali nel centro di gravità si prendono come assi delle x, y, z, (1) e (2) sono soddisfatte per tutt'i valori di h. Quindi, se una linea retta è un asse principale nel centro di gravità, essa è un asse principale in ogni punto della sua lunghezza.

25. Prop. *Date le posizioni degli assi principali* Ox, Oy, Oz *nel centro di gravità* O, *ed i momenti d' inerzia rispetto ad essi, trovare le posizioni degli assi principali in un punto qualunque* P *nel piano delle* xz, *ed i momenti d'inerzia rispetto a questi assi.*

Sia la massa del corpo presa come unità, e siano A, B i momenti d'inerzia rispetto agli assi Ox, Oy, dei quali supporremo A il maggiore.

Si prendano due punti S ed H nell'asse delle x da ciascuna parte dell'origine sicchè

$$OS = OH = \sqrt{A-B}.$$

Allora poichè questi punti sono in uno degli assi principali nel centro di gravità, gli assi principali in S ed H sono paralleli agli assi delle coordinate, ed i momenti d'inerzia rispetto a quelli nel piano delle xy sono rispettivamente A e $B+OS^2=A$, e questi essendo eguali, ogni linea retta condotta per S o H nel piano delle xy è un asse principale in quel punto, ed il momento d'inerzia rispetto ad essa è eguale ad A.

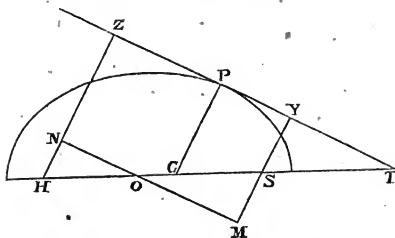
Se P è un punto qualunque nel piano delle xy, allora uno degli assi principali in P sarà perpendicolare al piano delle xy. Infatti se p, q sono le coordinate di P, le condizioni affinchè questa linea sia un asse principale sono

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\,(x-p)\,z &= 0 \\ \Sigma m\,(y-q)\,z &= 0 \end{aligned}\right\},$$

le quali sono evidentemente soddisfatte poichè il centro di gravità è l'origine, e gli assi principali sono gli assi delle coordinate.

Gli altri due assi principali si possono trovare così. Se due linee rette che s'incontrano in un punto P sono tali che i momenti d'inerzia rispetto ad esse sono eguali, allora purchè esse siano in un piano principale gli assi principali in P bisegano gli angoli tra quelle linee rette. Infatti se col centro P si descrive l'ellisse dei momenti, allora gli assi di questa ellisse bisegano gli angoli tra due raggi vettori eguali qualunque.

Si congiungano SP ed HP; i momenti d'inerzia rispetto ad SP, HP sono eguali ad A. Quindi, se PG e PT sono le bisettrici interna ed esterna dell'angolo SPH; PG, PT sono gli assi

principali in P. *Se quindi con* S *ed* H *come fuochi si descrive un' ellisse o un' iperbole qualunque, la tangente e la normale in ogni punto sono gli assi principali in quel punto.*

26. Si prenda una linea retta qualunque MN condotta per l'origine, che faccia un angolo θ con l'asse delle x. Si tirino SM, HN perpendicolari ad MN. Il momento d'inerzia rispetto ad essa è

$$\begin{aligned} &= A\cos^2\theta + B\,\text{sen}^2\theta \\ &= A - (A-B)\,\text{sen}^2\theta \\ &= A - (OS\,\text{sen}\theta)^2 \\ &= A - SM^2. \end{aligned}$$

Per P si tiri PT parallela ad MN, e siano SY ed HZ le perpendicolari su di essa da S ed H. Il momento d'inerzia rispetto a PT è allora

$$\begin{aligned} &= \text{momento rispetto } MN + MY^2 \\ &= A + (MY - SM)(MY + SM) \\ &= A + SY \cdot HZ. \end{aligned}$$

Nello stesso modo si può dimostrare che il momento d'inerzia rispetto ad una linea PG che passa tra H ed S è *minore* di A di quanto è il prodotto delle perpendicolari da S ed H sopra PG.

Se quindi con S *ed* H *come fuochi si descrive un' ellisse o un'iperbole qualunque, il momento d' inerzia rispetto ad una tangente qualunque dell' una o dell' altra di queste curve è costante.*

Segue da ciò che i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali in P sono eguali a $B + \left(\frac{SP \pm HP}{2}\right)^2$. Infatti se a e b sono gli assi dell' ellisse abbiamo

$$a^2 - b^2 = OS^2 = A - B,$$

e quindi

$$A + SY \cdot HZ = A + b^2 = B + a^2 = B + \left(\frac{SP + HP}{2}\right)^2,$$

e l'iperbole si può trattare nello stesso modo.

27. Questo ragionamento si può estendere a punti che giacciono in un dato piano qualunque condotto pel centro di gravità O del corpo. Siano Ox, Oy gli assi nel dato piano tali che il prodotto d'inerzia rispetto ad essi sia zero (Art. 22). Si costruiscano i punti S ed H come sopra sicchè OS^2 ed OH^2 sono eguali alla differenza dei momenti d'inerzia rispetto ad Ox ed Oy. Si tiri Sy' parallela per S all'asse delle y, il prodotto d'inerzia rispetto ad Sx, Sy' è eguale a quello rispetto ad Ox, Oy insieme col prodotto d'inerzia dell'intera massa riunita in O. Tutti e due questi sono zero, quindi l'ellisse dei momenti in S è un circolo, ed il momento d'inerzia rispetto ad ogni linea retta condotta per S nel piano xOy è lo stesso ed eguale a quello rispetto ad Ox. Possiamo allora mostrare che i momenti d'inerzia rispetto a PH e PS sono eguali; sicchè PG, PT, le bisettrici interna ed esterna dell'angolo SPH, sono i diametri principali dell'ellisse dei momenti in P. Ne segue ancora che i momenti d'inerzia rispetto alle tangenti di una conica di cui i fuochi sono S ed H sono eguali.

28. *Date le posizioni degli assi principali* OA, OB, OC *nel centro di gravità* O *ed i momenti d'inerzia* A, B, C *rispetto ad essi, trovare le posizioni degli assi principali ed i momenti principali in ogni altro punto* P.

Si costruisca una quadrica omofocale con l'ellissoide di girazione in O, e siano i quadrati dei suoi assi $A+\lambda$, $B+\lambda$, $C+\lambda$, la massa del corpo essendo presa come unità. Sia OZ la perpendicolare da O sopra un piano qualunque condotto per P tangente a questa quadrica, e tagli OZ in Y il piano parallelo condotto tangente all'ellissoide di girazione. Siano (lmn) i coseni di direzione della linea retta OYZ, allora

$$OZ^2 = (A+\lambda)\,l^2 + (B+\lambda)\,m^2 + (C+\lambda)\,n^2,$$

$$OY^2 = Al^2 + Bm^2 + Cn^2;$$

onde $$OZ^2 - OY^2 = \lambda.$$

Il momento d'inerzia rispetto ad OYZ per l'Art. 19 $\Big\} = OY^2 = OZ^2 - \lambda;$

quindi il momento d'inerzia rispetto a PL parallela ad OYZ condotta per P $\Big\} = OZ^2 + PZ^2 - \lambda = OP^2 - \lambda.$

Questo è lo stesso per tutt'i piani tangenti che si possono tirare per P a toccare una quadrica qualunque omofocale. Quindi il momento d'inerzia rispetto ad una normale qualunque in P al cono il di cui vertice è P e che inviluppa una quadrica qualunque omofocale con l'ellissoide di girazione in O è costante ed $= OP^2 - \lambda$.

Queste normali costituiscono il cono reciproco del cono inviluppante, e si dimostra nella Geometria a tre coordinate che i diametri principali di un cono e del suo cono reciproco coincidono in direzione. Quindi per l'Art. 21, gli assi principali del corpo in P sono i diametri principali del cono il di cui vertice è P e che inviluppa una quadrica qualunque omofocale con l'ellissoide di girazione nel centro di gravità.

29. Consideriamo i due casi estremi di questa proposizione.

1.° Si costruisca una quadrica omofocale con l'ellissoide di girazione e che passi per P. Il cono inviluppante diviene un piano tangente, ed un diametro principale è la normale alla quadrica. Quindi i tre assi principali del corpo nel punto P sono le tre normali alle tre quadriche che si possono condurre per P omofocali con l'ellissoide di girazione. Siano λ_1, λ_2, λ_3 i parametri di quelle tre quadriche, allora per quello che precede, i momenti principali sono rispettivamente $OP^2 - \lambda_1$, $OP^2 - \lambda_2$, $OP^2 - \lambda_3$.

Se vogliamo usare solamente una quadrica, possiamo considerare l'ellissoide omofocale condotta per P. Sappiamo (per la Geometria a tre coordinate) che le normali alle altre due quadriche omofocali sono tangenti alle linee di curvatura sull'ellissoide, e sono anche parallele ai diametri principali della sezione diametrale fatta da un piano parallelo al piano tangente in P. E se D_1 D_2 sono questi semidiametri principali, sappiamo che

$$\lambda_2 = \lambda_1 - D_1^2, \quad \lambda_3 = \lambda_1 - D_2^2.$$

Quindi, se per un punto qualunque P descriviamo la quadrica

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} = 1,$$

gli assi delle coordinate essendo gli assi principali nel centro di gravità, allora gli assi principali in P sono la normale a questa quadrica, e le parallele agli assi della sezione diametrale fatta da un piano parallelo al piano tangente in P. E se questi assi sono $2D_1$ e $2D_2$, i momenti principali in P sono

$$OP^2 - \lambda, \quad OP^2 - \lambda + D_1^2, \quad OP^2 - \lambda + D_2^2.$$

Siccome dovremo spesso riferirci alle quadriche omofocali con

l'ellissoide di girazione nel centro di gravità, le chiameremo le quadriche *sussidiarie.*

30. 2.° Consideriamo l'altro caso estremo della proposizione nell' Art. 28. Diminuisca la quadrica omofocale finchè diventi una conica focale, allora gli assi principali di un sistema in P sono i diametri principali di un cono il cui vertice è P e di cui la base è una conica focale dell' ellissoide di girazione nel centro di gravità.

I coni di momenti eguali in P sono omociclici, quindi i loro coni reciproci sono omofocali. Questi sono i coni il di cui vertice comune è P, e che inviluppano una quadrica sussidiaria qualunque. Così i due coni il di cui vertice è P, e le di cui basi sono le coniche focali reali sono omofocali e quindi ancora si tagliano tra loro ad angoli retti.

31. *Gli assi delle coordinate essendo gli assi principali nel centro di gravità si cerca di esprimere la condizione affinchè una data linea retta qualunque sia un asse principale in qualche punto della sua lunghezza e di trovare quel punto.*

Siano le equazioni della data linea retta

$$\frac{x-f}{l}=\frac{y-g}{m}=\frac{z-h}{n} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

allora essa deve essere normale alla quadrica

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}+\frac{z^2}{C+\lambda}=1 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

nel punto nel quale la linea retta è un asse principale.

Quindi paragonando le equazioni della normale a (2) con (1), abbiamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{A+\lambda}&=\mu l\\ \frac{y}{B+\lambda}&=\mu m\\ \frac{z}{C+\lambda}&=\mu n\end{aligned}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

queste sei equazioni debbono essere soddisfatte dagli stessi valori di x, y, z, λ e μ.

Sostituendo per x, y, z da (3) in (1), otteniamo

$$A\mu-\frac{f}{l}=B\mu-\frac{g}{n}=C\mu-\frac{h}{n},$$

eliminando μ da queste ultime equazioni abbiamo

$$\frac{\frac{f}{l}-\frac{g}{m}}{A-B}=\frac{\frac{g}{m}-\frac{h}{n}}{B-C}=\frac{\frac{h}{n}-\frac{f}{l}}{C-A}=\mu \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (E).$$

Queste chiaramente equivalgono ad una sola equazione, che è la condizione richiesta affinchè una linea retta sia un asse principale in qualche punto della sua lunghezza.

Sostituendo per x, y, z da (3) in (2), abbiamo

$$\lambda (l^2+m^2+n^2)=\frac{1}{\mu^2}-(Al^2+Bm^2+Cn^2),$$

che dà un valore solamente per λ. I valori di λ e μ essendo stati trovati, le equazioni (3) determineranno x, y, z, le coordinate del punto nel quale la linea retta è un asse principale.

Il significato geometrico di questa condizione si può trovare con le seguenti considerazioni, che sono state date dal Sig. Townsend nel *Mathematical Journal*. La normale ed il piano tangente in ogni punto di una quadrica incontreranno un piano principale qualunque in un punto ed in una linea retta, che sono polo e polare rispetto alla conica focale in quel piano. Quindi per trovare se una data linea retta è un asse principale o pur no, si tiri un piano qualunque perpendicolare alla linea retta, e si prolunghino la linea retta ed il piano sino ad incontrare un piano principale qualunque nel centro di gravità. Se la linea d'intersezione del piano è parallela alla linea polare del punto d'intersezione della linea retta rispetto alla conica polare, l'asse sarà un asse principale, altrimenti non sarà tale. Ed il punto nel quale la data linea retta è un asse principale si può trovare conducendo un piano per la linea polare perpendicolarmente alla linea retta. Il punto d'intersezione è il punto richiesto.

La condizione analitica (E) esprime esattamente il fatto che la linea polare è parallela all'intersezione del piano.

32. Il teorema seguente è dovuto anche allo stesso autore.

Siano due punti P, Q situati in modo che un asse principale in P interseghi un asse principale in Q. Allora se si tirano in P e Q due piani perpendicolari a questi assi principali, la loro intersezione sarà un asse principale nel punto dove essa è tagliata dal piano che contiene gli assi principali in P e Q.

Infatti gli assi principali in P, Q incontrino un piano principale qualunque nel centro di gravità in p, q, ed i piani perpendicolari interseghino lo stesso piano principale in LN, MN. In-

oltre i piani perpendicolari s'interseghino in RN. Allora RN è perpendicolare al piano che contiene i punti P, Q, p, q. Inoltre poichè le polari di p e q sono LN, MN, ne segue che pq è la polare del punto N. Quindi la linea retta RN soddisfa al criterio dell'ultimo Articolo.

33. *Trovare il luogo dei punti dove due momenti principali d'inerzia sono eguali tra loro.*

I momenti principali in un punto qualunque P sono

$$I_1 = OP^2 - \lambda, \quad I_2 = OP^2 - \lambda + D_1^2, \quad I_3 = OP^2 - \lambda + D_2^2.$$

Se eguagliamo I_1 ed I_2 abbiamo $D_1=0$, ed il punto P deve giacere sulla conica focale ellittica dell'ellissoide di girazione.

Se eguagliamo I_2 ed I_3 abbiamo $D_1=D_2$, sicchè P è un umbilico di un ellissoide qualunque omofocale con l'ellissoide di girazione. Il luogo di questi umbilichi è la conica focale iperbolica.

Nel primo di questi casi abbiamo $\lambda=-C$, e D_2 è il semidiametro della conica focale coniugato ad OP.

Quindi $D_2^2+OP^2=$ somma dei quadrati dei semiassi

$$= A - C + B - C.$$

I tre momenti principali sono perciò

$$\left.\begin{aligned} I_1 = I_2 &= OP^2 + C, \\ I_3 &= A + B - C, \end{aligned}\right\}$$

e l'asse del momento disuguale è tangente alla conica focale.

Il secondo caso si può trattare nello stesso modo usando un iperboloide omofocale, abbiamo perciò

$$\left.\begin{aligned} I_2 = I_3 &= OP^2 + B, \\ I_2 &= A + C - B, \end{aligned}\right\}$$

e l'asse del momento disuguale è tangente alla conica focale.

34. *Trovare le curve sopra una quadrica sussidiaria qualunque per le quali i momenti principali d'inerzia sono eguali ad una data quantità* I.

1.° Tutti quei punti nei quali il momento principale rispetto alla normale è costante si trovano facendo I_1 eguale alla data quantità. Ciò dà OP costante, e quindi la curva richiesta è l'intersezione di una sfera con una quadrica. Questa curva si chiama una conica sferica.

2.° Tutti quei punti nei quali il momento principale rispetto ad una tangente è costante si trovano facendo I_2 o I_3 eguale alla data quantità. Sia r la distanza OP, a, b, c siano i semiassi della quadrica, e p la lunghezza della perpendicolare dal centro di gravità sul piano tangente in P. Allora

$$\left.\begin{array}{r} D_1 D_2 p = abc, \\ r^2 + D_1^2 + D_2^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{array}\right\}$$

Quindi
$$\begin{aligned} I_2 &= r^2 + D_1^2 - \lambda \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - \lambda - \frac{a^2 b^2 c^2}{p^2 D_1^2}. \end{aligned}$$

Sappiamo che lungo una linea qualunque di curvatura pD_1 è costante. *Quindi i momenti d'inerzia rispetto alle tangenti ad una linea qualunque di curvatura sono eguali tra loro. E queste tangenti sono assi principali nei punti di contatto.*

Nel piano che contiene I_2, I_3, e pel loro punto d'intersezione si tiri una linea retta qualunque che faccia un angolo φ con l'asse I_2. Questa linea retta non è in generale un asse principale. Il momento d'inerzia rispetto ad essa, è

$$\begin{aligned} I &= I_1 \cos^2\varphi + I_2 \operatorname{sen}^2\varphi \\ &= r^2 - \lambda + D_1^2 \cos^2\varphi + D_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi \\ &= r^2 + D_1^2 + D_2^2 - \lambda - D_1^2 D_2^2 \left(\frac{\cos^2\varphi}{D_1^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{D_2^2} \right) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - \lambda - \frac{a^2 b^2 c^2}{p^2 D^2}, \end{aligned}$$

dove D è il raggio vettore parallelo all'asse I della sezione della quadrica fatta da un piano condotto pel centro parallelo al piano tangente in P. Ma sappiamo che lungo una linea geodetica quâlunque pD è costante. *Quindi i momenti d'inerzia rispetto alle tangenti ad una linea geodetica qualunque sulla quadrica sono eguali tra loro.* Queste tangenti non sono in generale assi principali nei punti di contatto.

35. Il luogo di tutti quei punti nei quali uno dei momenti principali d'inerzia del corpo è costante si chiama una superficie di eguali momenti.

Per trovare l'equazione di una tale superficie abbiamo sola-

mente da porre I_1 costante, questo dà $\lambda = r^2 - I$. Sostituendo nell'equazione della quadrica sussidiaria, l'equazione della superficie diviene

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2+A-I}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2+B-I}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2+C-I}=1.$$

Per un punto qualunque P sulla superficie di eguali momenti si descriva la quadrica sussidiaria tale che l'asse principale sia una tangente ad una linea di curvatura sulla quadrica. Per l'Art. 34 una delle intersezioni della superficie di eguali momenti con questa quadrica è la linea di curvatura. Quindi l'asse principale in P rispetto al quale il momento d'inerzia è I è una tangente alla superficie di eguali momenti.

Ancora, si costruisca la quadrica sussidiaria per P tale che l'asse principale sia una normale in P, allora una delle intersezioni della superficie dei momenti con questa quadrica è la conica sferica per P. La normale alla quadrica, essendo l'asse principale, si è ora dimostrato essere una tangente alla superficie. Quindi il piano tangente alla superficie di eguali momenti, è il piano che contiene la normale alla quadrica e la tangente alla conica sferica.

Per condurre la perpendicolare dal centro O su questo piano tangente, possiamo seguire la regola degli elementi di Geometria. Si prenda PP' tangente alla conica sferica, si tiri la perpendicolare da O sopra PP', questa è il raggio vettore OP, poichè PP' è tangente alla sfera. In P nel piano tangente si tiri la perpendicolare a PP', questa è la normale PQ alla quadrica. Da O si tiri la perpendicolare OQ su questa normale, allora OQ è normale al piano tangente. Quindi questa costruzione,

Se P *è un punto qualunque sulla superficie di eguali momenti il di cui parametro è* I, *ed* OQ *la perpendicolare dal centro sul piano tangente, allora* PQ *è l'asse principale in* P *rispetto al quale il momento d'inerzia è la quantità costante* I.

La superficie di eguali momenti diviene la superficie delle onde di Fresnel quando I è maggiore del più grande dei momenti principali d'inerzia nel centro di gravità. La forma generale della superficie è troppo bene conosciuta per aver bisogno qui di una minuta discussione. Essa consiste di due falde, che diventano una sfera concentrica ed uno sferoide quando due dei momenti principali nel centro di gravità sono eguali. Quando i momenti principali sono disuguali, vi sono due singolarità nella superficie.

(1) Le due falde s'intersegano in un punto P nel piano dei momenti massimo e minimo. In P vi è un cono tangente alla su-

perficie. Si tiri un piano tangente qualunque a questo cono, e sia OQ la perpendicolare dal centro di gravità O su questo piano tangente. Allora PQ è un asse principale in P. Così vi sono infiniti assi principali in P poichè si possono tirare infiniti piani tangenti al cono. Ma in un punto dato, non vi possono essere più di tre assi principali a meno che due degli assi principali non siano eguali, ed allora il luogo degli assi principali è un piano. Quindi il punto P è situato sopra una conica focale, ed il luogo di tutte le linee PQ è il piano normale alla conica. Il punto Q giace sopra una sfera il di cui diametro è OP, quindi il luogo di Q è un circolo.

(2) Le due falde hanno un piano tangente comune che tocca la superficie lungo una curva. Questa curva è un circolo il di cui piano è perpendicolare al piano dei momenti massimo e minimo. Sia OP' la perpendicolare da Q sul piano del circolo, allora P' è un punto del circolo. Se R è un altro punto qualunque del circolo l'asse principale in R è RP'. Così vi è un anello circolare di punti in ciascuno dei quali l'asse principale passa per lo stesso punto ed i momenti d'inerzia rispetto a questi assi principali sono tutti eguali.

L'equazione della superficie di eguali momenti si può anche usare allo scopo di trovare i tre momenti principali in un punto qualunque di cui sono date le coordinate (xyz). Se liberiamo l'equazione dalle frazioni, abbiamo un'equazione cubica per determinare I le di cui radici sono i tre momenti principali.

Così si voglia trovare il luogo di tutti quei punti in un corpo nei quali una funzione simmetrica qualunque dei tre momenti principali sia eguale ad una data quantità. Possiamo esprimere questa funzione simmetrica in termini dei coefficienti con le regole ordinarie, e si troverà così l'equazione del luogo richiesto.

ESEMPII.

1. Determinare le condizioni affinchè vi sia un punto in un corpo tale che il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualunque condotto per quel punto sia sempre lo stesso.

Risultato. Due dei momenti principali nel centro di gravità debbono essere eguali e ciascuno deve essere minore del terzo momento principale. Vi sono allora due punti nell'asse del momento disuguale che soddisfano alle condizioni.

2. Gli assi principali di un triangolo rettangolo nell'angolo

retto sono, la perpendicolare al piano e due altre rette inclinate ai suoi lati sotto gli angoli $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{ab}{a^2-b^2}$, dove a e b sono i lati del triangolo adiacenti all'angolo retto.

3. Gli assi principali di un quadrante di un'ellisse al centro sono, la perpendicolare al piano e due altre rette inclinate ai diametri principali sotto gli angoli $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{\pi}\frac{ab}{a^2-b^2}$, dove a e b sono i semiassi dell'ellisse.

4. I diametri principali di un cubo in ogni punto P sono, la linea retta che congiunge P ad O centro di gravità del cubo, e due linee rette qualunque in P perpendicolari a PO.

5. Due elementi di massa m sono situati alle estremità dell'asse minore di un'area ellittica di massa M. Dimostrare che gli assi principali in un punto qualunque del contorno dell'ellisse saranno la tangente e la normale all'ellisse, purchè $\frac{m}{M}=\frac{5}{8}\,\frac{e^2}{1-2e^2}$.

6. Se P è un punto qualunque in un piano principale nel centro di gravità, allora ogni asse che passa per P, ed è un asse principale in qualche punto, giace in uno di due piani perpendicolari. Uno di questi piani è il piano principale nel centro di gravità, e l'altro è il piano perpendicolare alla linea polare di P rispetto alla conica focale.

7. Se P è un punto qualunque in un piano principale nel centro di gravità, allora il luogo di tutt'i punti Q nei quali QP è un asse principale è un circolo che passa per P ed ha il suo centro nel piano principale.

8. Lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile che è l'inviluppo dei piani normali ad una linea qualunque di curvatura condotta sopra una quadrica sussidiaria è una curva tale che tutte le sue tangenti sono assi principali in qualche punto di ciascuna.

9. Gli assi principali nel centro di gravità essendo gli assi delle coordinate, dimostrare che l'ellissoide dei momenti nel punto (p, q, r) è

$$(A+q^2+r^2)X^2+(B+r^2+p^2)Y^2+(C+p^2+q^2)Z^2$$
$$-2qrYZ-2rpZX-2pqXY=\varepsilon^4$$

quando si riferisce al suo centro come origine.

10. Mostrare che l'equazione cubica per trovare i tre momenti principali d'inerzia in un punto qualunque (pqr) si può scrivere nella forma di un determinante

$$\begin{vmatrix} I-(A+q^2+r^2) & pq & rp \\ pq & I-(B+r^2+p^2) & qr \\ rp & qr & I-(C+p^2+q^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Se (l, m, n) sono proporzionali ai coseni di direzione dell'asse corrispondente ad uno qualunque dei valori di I, i loro valori si possono trovare dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \{I-(A+q^2+r^2)\}\,l + pqm + rpn = 0, \\ pql + \{I-(B+r^2+p^2)\}\,m + qrn = 0, \\ rpl + qrm + \{I-(C+p^2+q^2)\}\,n = 0. \end{array}\right\}.$$

11. Se una superficie di eguali momenti interseghi una quadrica omofocale con l'ellissoide di girazione nel centro di gravità, allora le intersezioni sono una conica sferica ed una linea di curvatura. Ma se la quadrica è un ellissoide, tutte e due queste non possono essere reali.

12. Trovare il luogo di tutti quei punti in un corpo nei quali

(1) la somma dei momenti principali sia eguale ad una data quantità I;

(2) la somma dei prodotti dei momenti principali presi a due a due, sia eguale ad I^2;

(3) il prodotto dei momenti principali sia eguale ad I^3.

I risultati sono

(1) una sfera il di cui raggio è $\sqrt{\dfrac{I-(A+B+C)}{2M}}$, Art. 8;

(2) la superficie

$$\left.\begin{array}{l} (x^2+y^2+z^2)^2 + (A+B+C)(x^2+y^2+z^2) \\ \quad + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + AB + BC + CA \end{array}\right\} = I^2, \text{ Art. } 35;$$

(3) la superficie

$$A'B'C' - A'y^2z^2 - B'z^2x^2 - C'x^2y^2 - 2x^2y^2z^2 = I^3,$$

dove $A' = A + y^2 + z^2$, con simili espressioni per B', C'.

13. Dimostrare che il luogo di un punto P nel quale uno degli assi principali è parallelo ad una data linea retta è un' iperbole rettangolare nel piano della quale giace il centro di gravità del corpo, ed uno degli asintoti è parallelo alla linea retta data. Ma se la data linea retta è parallela ad uno degli assi principali nel centro di gravità, il luogo di P è quell' asse principale o il piano principale perpendicolare.

CAPITOLO II.

Principio di D'Alembert, etc.

36. Un corpo rigido è una collezione di elementi materiali connessi insieme da relazioni geometriche invariabili. Il nostro primo tentativo quindi per determinare il moto di un tal corpo sarebbe di scrivere le equazioni del moto dei diversi elementi secondo i principii stabiliti nei trattati sulla Dinamica di un elemento, e poi di eliminare le reazioni ignote tra gli elementi, e così ottenere le equazioni del moto di un corpo rigido.

Ma se cerchiamo di fare ciò, dobbiamo immediatamente fermarci per la nostra ignoranza della natura delle azioni di un elemento su di un altro. Sarà necessario di fare alcune supposizioni rispetto a queste.

Possiamo supporre *prima,* che l'azione fra due elementi è secondo la linea che li congiunge; *in secondo luogo*, che l'azione e la reazione tra due qualunque sono eguali ed opposte.

Le equazioni del moto di ciascun elemento separato si possono scrivere subito con queste supposizioni. Supponiamo che vi siano n elementi, allora vi saranno $3n$ equazioni, e come si mostra nei trattati sulla *Statica,* vi debbono essere almeno $3n-6$ reazioni ignote. È chiaro quindi che dopo effettuata l'eliminazione non vi possono essere *più di 6* equazioni risultanti libere dalle ignote reazioni.

Ma se si scrivono le equazioni si vedrà che le reazioni entrano nelle equazioni in modo tale che possiamo sempre eliminarle, comunque numerosi siano gli elementi, ed ottenere sei equazioni risultanti.

Ma D' Alembert propose un metodo col quale queste sei equazioni risultanti si possono ottenere senza scrivere le equazioni del moto dei diversi elementi, e senza fare alcuna supposizione sulla natura delle loro azioni scambievoli eccetto la seguente:

Le azioni e reazioni interne di un sistema qualunque di corpi rigidi in movimento sono in equilibrio tra loro.

37. *Spiegare il Principio di D' Alembert.*

Si consideri un elemento qualunque di uno dei corpi rigidi del sistema. Sia m la sua massa, (x, y, z) siano le sue coordinate al tempo t rispetto ad assi rettangolari fissi qualunque. Sia F la

risultante delle forze impresse, R la risultante delle azioni interne sull'elemento. Le accelerazioni dell'elemento sono $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. Sia f la risultante di queste accelerazioni.

Ora se supponiamo l'elemento separato dal resto del corpo e sollecitato dalle forze F ed R, la sua accelerazione sarà f. Ma, come si spiega nella Dinamica di un elemento, la forza che produrrebbe questa accelerazione è misurata da mf. Quindi mf si può chiamare la forza effettiva sull'elemento m. E ne segue che se rivolgiamo questa in senso contrario, le tre F, R, mf sono in equilibrio.

Possiamo applicare lo stesso ragionamento ad ogni elemento del sistema, ed avremo allora un gruppo di forze simili ad R, un gruppo di forze simili ad F, ed un gruppo di simili ad mf, agenti su di un gruppo di elementi connessi da relazioni invariabili, e questi tre gruppi formeranno un sistema di forze in equilibrio.

Ora il principio di D'Alembert assume che le reazioni interne tra gli elementi di un sistema di corpi rigidi sono tali che, prese tutte insieme, formano un sistema di forze in equilibrio. Questo equivale ad asserire che il gruppo R formerà esso stesso un sistema di forze in equilibrio. Quindi ne segue che il gruppo F sarà in equilibrio col gruppo mf.

Quindi, *se forze eguali alle forze effettive ma agenti in direzioni esattamente opposte fossero applicate in ciascun punto del sistema, esse sarebbero in equilibrio con le forze impresse.*

D'Alembert si esprime nel seguente modo: « Siano A, B, C, etc. i corpi che compongono il sistema, e supponiamo che siano loro stati impressi i movimenti a, b, c etc. che essi siano costretti, a motivo della loro azione scambievole, di cambiare nei movimenti a, b, c, etc. È chiaro che si può riguardare il movimento a impresso al corpo A come composto del movimento a, che esso ha preso, e di un altro movimento α; che si possono similmente riguardare i movimenti b, c, etc. come composti dei movimenti b, β; c, γ; etc. d'onde ne segue che il movimento dei corpi A, B, C, etc. tra loro sarebbe stato lo stesso, se in luogo di dar loro gl'impulsi a, b, c, etc. si fossero dati ad un tempo i doppii impulsi a, α; b, β; etc. Ora per supposizione i corpi A, B, C etc. hanno preso da sè i movimenti a, b, c, etc. dunque i movimenti α, β, γ, etc. debbono essere tali che non turbano affatto i movimenti a, b, c etc. vale a dire che se i corpi non avessero ricevuto che i movimenti α, β, γ, etc. questi movimenti avrebbero dovuto distruggersi scambievolmente ed il sistema rimanere in riposo. »

38. Nel principio di D' Alembert non si è fatta alcuna suppo- sizione sulla *natura* delle azioni tra gli elementi; quindi il principio è vero o che gli elementi siano rigidamente connessi tra loro o pur no. Possiamo, per esempio, applicare il principio al caso di un fluido in movimento o pure ad un corpo qualunque elastico e flessibile.

Il principio è in realtà un'estensione della prima legge del moto. Quella legge equivale ad asserire che le azioni molecolari degli elementi che costituiscono un corpo non affettano il moto di traslazione di quel corpo. Il principio di D'Alembert asserisce inoltre che esse non affettano il suo movimento quando quel movimento consiste di una combinazione di un moto di traslazione con uno di rotazione.

La verità del principio non si può stabilire con ragionamento astratto. Esso si deve considerare come poggiato sull'evidenza sperimentale, o piuttosto su quella *pruova induttiva* che deriva dall' accurata coincidenza dei risultati del calcolo fondato su questo principio con i moti osservati di un corpo rigido.

39. *Applicare il principio di D' Alembert ad ottenere le equazioni del moto di un sistema di corpi rigidi.*

Siano (x, y, z) le coordinate dell'elemento m al tempo t riferito ad un sistema qualunque di assi rettangolari fissi nello spazio. Allora $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, e $\frac{d^2z}{dt^2}$, saranno le accelerazioni dell'elemento. Siano X, Y, Z le forze acceleratrici impresse sullo stesso elemento risolute parallelamente agli assi. Pel principio di d'Alembert le forze

$$m\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right),\quad m\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right),\quad m\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

insieme con le forze analoghe su ciascun elemento saranno in equilibrio. Quindi per i principii della Statica abbiamo l'equazione

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma mX,$$

e due simili equazioni per y e z; queste si ottengono risolvendo parallelamente agli assi. Inoltre abbiamo

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma m(yZ-zY),$$

e due simili equazioni per zx ed xy; queste si ottengono prendendo i momenti rispetto agli assi.

Queste equazioni si possono scrivere nelle forme più convenienti

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx}{dt} &= \Sigma mX \\ \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dy}{dt} &= \Sigma mY \\ \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dz}{dt} &= \Sigma mZ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= \Sigma m(yZ - zY) \\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= \Sigma m(zX - xZ) \\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= \Sigma m(xY - yX) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (B).$$

In un modo precisamente simile prendendo le espressioni delle accelerazioni in coordinate polari avremmo ottenuto un altro ma equivalente sistema di equazioni del moto.

40. Consideriamo il significato di queste equazioni un poco più minutamente. Se moltiplichiamo la massa m di ogni elemento per la sua velocità v abbiamo la quantità di moto mv di quell'elemento. Supponiamo che l'elemento sia sollecitato con questa quantità di moto agente nella direzione del suo movimento. La somma delle parti risolute delle quantità di moto di tutti gli elementi in una direzione qualunque, e la somma dei loro momenti rispetto ad una linea retta qualunque non saranno alterate se combiniamo tutte queste quantità di moto insieme come se fossero forze secondo le regole della Statica. Allo scopo quindi di trovare queste parti risolute e questi momenti possiamo dire che l'intera quantità di moto di un sistema è equivalente ad una quantità di moto risultante lineare agente in un punto O preso arbitrariamente, e ad una coppia risultante. Nello stesso modo se moltiplichiamo la massa di un elemento qualunque per la sua accelerazione f abbiamo mf per la forza effettiva dell'elemento. Queste forze ancora si possono comporre nello stesso modo. Sicchè l'intera forza effettiva di un corpo si può dire essere equivalente ad una forza effettiva risultante lineare agente in un punto O preso arbitrariamente, e ad una coppia risultante.

La quantità di moto di un elemento qualunque m è equivalente ad una sola quantità di moto lineare agente nell'origine O,

e ad una coppia. Siano OM, ON due linee rette condotte per l'origine per rappresentare in direzione e grandezza al tempo t la quantità di moto lineare e l'asse della coppia. Siano OM', ON' le posizioni di queste linee al tempo $t+dt$. Allora MM' ed NN' rappresentano la quantità di moto risultante lineare e la coppia risultante aggiunte nel tempo dt. Quindi la *forza effettiva* di un elemento qualunque m è equivalente ad una sola forza effettiva lineare agente in O rappresentata da $\frac{MM'}{dt}$, e ad una sola coppia effettiva il di cui asse è rappresentato da $\frac{NN'}{dt}$.

Siano OV, OH due linee rette condotte per l'origine per rappresentare in direzione e grandezza la quantità di moto risultante lineare e la coppia risultante dell'intero sistema ad un tempo qualunque t. Siano OV', OH' le posizioni di queste linee al tempo $t+dt$. Allora OV è la risultante del gruppo OM corrispondente a tutti gli elementi del sistema, ed OV' la risultante del gruppo OM'. Quindi $\frac{VV'}{dt}$ rappresenta l'intera *forza effettiva* lineare del sistema al tempo t. Per un simile ragionamento $\frac{HH'}{dt}$ rappresenta la coppia effettiva risultante del sistema. Apparisce così che i punti V ed H tracciano due curve nello spazio le di cui proprietà sono analoghe a quelle dell'odografo nella Dinamica di un elemento. Segue da questo ragionamento, che se V_x è la parte risoluta della quantità di moto di un sistema nella direzione di una linea retta qualunque Ox, ed H_x è il momento della quantità di moto rispetto a quella linea retta, allora $\frac{dV_x}{dt}$ e $\frac{dH_x}{dt}$ sono rispettivamente la parte risoluta secondo, ed il momento rispetto quella linea retta, della forza effettiva dell'intero sistema.

Riferiamo ora l'intero sistema a coordinate Cartesiane come nell'Art. 39. Vediamo che $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ sono le parti risolute della quantità di moto dell'elemento m. Quindi OV è la risultante di $\Sigma m\frac{dx}{dt}$, $\Sigma m\frac{dy}{dt}$, e $\Sigma m\frac{dz}{dt}$. Inoltre $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$ è il momento della quantità di moto dell'elemento m rispetto all'asse delle z. Quindi OH è la risultante di

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right),\ \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),\ \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right).$$

Ora il principio di D'Alembert asserisce che le intere forze effettive di un sistema sono insieme equivalenti alle forze impresse. Quindi qualunque sienò le coordinate usate, se X ed L sono le parti risolute ed i momenti delle forze motrici impresse rispettivamente secondo e rispetto una linea retta fissa qualunque che chiameremo l'asse delle x, le equazioni del moto sono

$$\frac{dV_x}{dt} = X, \quad \frac{dH_x}{dt} = L.$$

La prima di queste corrisponde alle equazioni (A), la seconda alle equazioni (B) dell' Art. 39.

Possiamo notare i casi seguenti.

(1) Se nessuna forza impressa agisce sul sistema, le due linee OV, OH sono assolutamente fisse in direzione e grandezza durante il moto.

(2) Se tutte le forze impresse passano per un punto fisso, si scelga questo punto per origine, allora benchè OV possa essere variabile, OH è fissa in posizione e grandezza.

(3) Se tutte le forze impresse sono equivalenti ad un sistema di coppie, allora benchè OH possa essere variabile, OV è fissa in posizione e grandezza.

41. La posizione di un corpo nello spazio è data quando conosciamo le coordinate di un punto in esso e gli angoli che due linee rette fisse nel corpo fanno con gli assi delle coordinate. Vi sono tre relazioni geometriche tra questi sei angoli, sicchè la posizione di un corpo si può far dipendere da *sei* variabili indipendenti, cioè tre coordinate e tre angoli. Queste si potrebbero chiamare le *coordinate del corpo.* Con le parole « coordinate di un corpo » s' intendono quantità qualunque che determinano la posizione del corpo nello spazio.

È evidente che possiamo esprimere le coordinate (x,y,z) di un elemento qualunque m di un corpo in termini delle coordinate di quel corpo e di quantità che sono conosciute e rimangono costanti durante il moto. Prima, supponiamo che il sistema consista solamente di un solo corpo, allora se sostituiamo queste espressioni per x, y, z nelle equazioni (A) e (B) dell' Art. 39, avremo sei equazioni per determinare le sei coordinate del corpo in termini del tempo. Così il moto sarà determinato. Se il sistema consiste di più corpi, avremo considerando ciascuno separatamente, sei equazioni per ciascun corpo. Se vi sono delle reazioni ignote tra i corpi, queste saranno incluse in X, Y, Z. Per

ciascuna reazione vi sarà una corrispondente relazione geometrica che connette il moto di questi corpi. Così nel totale avremo equazioni sufficienti per determinare il movimento del sistema.

Affinchè le equazioni (A) e (B) non diventino espressioni complicate dopo la sostituzione di (x, y, z) in termini delle coordinate del corpo, è necessario di scegliere convenientemente quali debbano essere queste coordinate. In ciò dobbiamo in qualche modo essere guidati dai nostri risultati.

42. *Trovare la parte risoluta della quantità di moto di un sistema in una direzione qualunque.*

La data direzione si prenda come asse delle x. Siano (x, y, z) le coordinate di un elemento qualunque di cui la massa è m. La parte risoluta della sua quantità di moto nella data direzione è $m\frac{dx}{dt}$. Quindi la parte risoluta della quantità di moto dell'intero sistema è $\Sigma m\frac{dx}{dt}$. Siano (x', y', z') le coordinate del centro di gravità del sistema ed M l'intera massa. Allora

$$Mx' = \Sigma mx;$$

onde

$$M\frac{dx'}{dt} = \Sigma m\frac{dx}{dt}.$$

Quindi la parte risoluta della quantità di moto di un sistema in una direzione qualunque è eguale all'intera massa moltiplicata per la parte risoluta della velocità del centro di gravità.

Cioè, la quantità di moto lineare di un sistema è la stessa come se l'intera massa fosse riunita nel suo centro di gravità.

Nello stesso modo, la parte risoluta delle forze effettive di un sistema in una direzione qualunque è eguale all'intera massa moltiplicata per la parte risoluta dell'accelerazione del centro di gravità.

Apparisce da questa proposizione che sarà conveniente di prendere le coordinate del centro di gravità di ciascun corpo rigido nel sistema come tre delle coordinate di quel corpo. Possiamo allora esprimere in una forma semplice la parte risoluta delle forze effettive in una direzione qualunque.

Avendo scelto le coordinate del centro di gravità di un corpo come un mezzo per esprimere la sua quantità di moto lineare, si troverà generalmente conveniente di riferire il suo movimento angolare ad un sistema di assi coordinati che s'incontrano nel suo centro di gravità. Avremo quindi bisogno della proposizione seguente.

43. *Il momento della quantità di moto di un sistema rispetto ad una linea retta qualunque è eguale al momento della quantità di moto dell'intera massa supposta riunita nel suo centro di gravità e moventesi con esso, più il momento della quantità di moto del sistema relativa al suo centro di gravità rispetto alla linea retta parallela alla linea retta data condotta pel centro di gravità.*

La linea retta data sia presa come asse delle x, allora seguendo la stessa notazione come sopra, il momento della quantità di moto rispetto all'asse delle x è

$$\Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right).$$

Ora questa è un'espressione di secondo grado. Se quindi, sostituiamo $y=y'+y_1$, $z=z'+z_1$, otteniamo per l'Art. 10

$$\Sigma m \left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt} \right) + M \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right),$$

dove M è la massa del sistema o del corpo che si considera.

Il secondo termine di questa espressione è il momento rispetto all' asse delle x della quantità di moto di una massa M che si muove col centro di gravità.

Il primo termine è il momento rispetto ad una linea retta parallela all' asse delle x, non delle attuali quantità di moto di tutti gli elementi, ma delle loro quantità di moto *relativamente* al centro di gravità. Nel caso di un corpo particolare qualunque esso dipende perciò solamente dal moto del corpo relativamente al suo centro di gravità. Nel trovare il suo valore supporremo il centro di gravità ridotto in quiete applicando ad ogni elemento del sistema una velocità eguale ed opposta a quella del centro di gravità.

Nello stesso modo, questa proposizione sarà anche vera se per la « quantità di moto » del sistema sostituiamo la « forza effettiva ».

44. Non possiamo in questo punto trovare espressioni convenienti pel momento della quantità di moto rispetto ad una linea retta qualunque condotta pel centro di gravità. Diverse espressioni si troveranno vantaggiose in diverse circostanze. Queste saranno discusse nei capitoli seguenti di questo trattato.

La quantità $\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$ esprime il momento della quantità di moto rispetto all'asse delle z. Questa si chiama quindi *la*

quantità di moto angolare del sistema rispetto all'asse delle z. Vi è un'altra interpetrazione che si può dare di essa. Se trasformiamo in coordinate polari, abbiamo

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Ora $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ è l'area elementare descritta intorno all'origine nel tempo dt dalla proiezione dell'elemento sul piano delle xy. Se due volte quest'area polare si moltiplica per la massa dell'elemento, il prodotto si chiama l'area conservata dall'elemento nel tempo dt intorno all'asse delle z. Quindi

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

si chiama *l'area conservata* dal sistema in una unità di tempo, o più semplicemente l'area conservata.

45. Possiamo ora riunire insieme per richiamo i risultati degli articoli precedenti.

Siano u, v, w le velocità del centro di gravità di un corpo rigido qualunque di massa M risolute parallelamente a tre assi fissi rettangolari qualunque, siano h_1, h_2, h_3 i tre momenti della quantità di moto relativa al centro di gravità rispetto a tre assi rettangolari fissi in direzione e che s'incontrano nel centro di gravità. Allora le forze effettive del corpo sono equivalenti alle tre forze effettive $M\frac{du}{dt}$, $M\frac{dv}{dt}$, $M\frac{dw}{dt}$ agenti nel centro di gravità parallelamente alle direzioni secondo le quali le velocità sono state risolute, ed alle tre coppie effettive $\frac{dh_1}{dt}$, $\frac{dh_2}{dt}$, $\frac{dh_3}{dt}$ rispetto agli assi che s'incontrano nel centro di gravità relativamente ai quali sono stati presi i momenti. Le forze effettive di tutti gli altri corpi del sistema si possono esprimere in simil modo.

Allora tutte le forze e le coppie effettive, rivolte in senso contrario, saranno in equilibrio con le forze impresse. Le equazioni di equilibrio si possono poi trovare risolvendo in quelle direzioni e prendendo i momenti rispetto a quelle linee rette che siano più convenienti. Invece di rivolgere in senso contrario le forze effettive si trova ordinariamente più comodo di scrivere le forze impresse e le effettive nelle parti opposte delle equazioni.

46. Vi è un altro modo di enunciare i risultati degli articoli 42 e 43 che è spesso utile.

(1) Il moto del centro di gravità di un sistema sollecitato da forze qualunque è lo stesso come se tutta la massa fosse riunita nel centro di gravità e tutte le forze fossero applicate in quel punto parallelamente alle loro primitive direzioni.

(2) Il moto di un corpo sollecitato da forze qualunque attorno al suo centro di gravità è lo stesso come se il centro di gravità fosse fisso e le stesse forze agissero sul corpo.

Questi si chiamano i principii della conservazione dei movimenti di translazione e di rotazione.

Queste due proposizioni seguono immediatamente dal sommario dei risultati dati nell' Art. 45. Però può essere utile di dedurli dai primi principii.

Prendendo una qualunque delle equazioni (A) abbiamo

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma mX.$$

Se x', y', z' sono le coordinate del centro di gravità, allora

$$x' \Sigma m = \Sigma mx,$$

onde

$$\frac{d^2x'}{dt^2} \Sigma m = \Sigma mX,$$

e le altre equazioni si possono trattare in simil modo.

Ma queste sono le equazioni che danno il movimento di una massa Σm sollecitata dalle forze ΣmX, etc. Quindi il primo principio è dimostrato.

Prendendo una qualunque delle equazioni (B) abbiamo

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma m(xY - yX).$$

Sia $x = x' + x_1$, $y = y' + y_1$, $z = z' + z_1$, allora per l' Art. 10 questa equazione diviene

$$\Sigma m \left(x_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) + \left(x' \frac{d^2y'}{dt^2} - y' \frac{d^2x'}{dt^2}\right) \Sigma m = \Sigma m(xY - yX).$$

Ora gli assi delle coordinate sono del tutto arbitrarii, si scelgano in modo che il centro di gravità si trovi nell' origine all' istante che si considera. Allora $x'=0$, $y'=0$, ma $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ non sono necessariamente zero. L' equazione allora diviene

$$\Sigma m \left(x_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) = \Sigma m (x_1 Y - y_1 X).$$

Questa equazione non contiene le coordinate del centro di gravità e vale per ogni istante separato del movimento e quindi è vera sempre. Ma questa e le due simili equazioni ottenute dalle altre due equazioni (B) sono esattamente le equazioni dei momenti che avremmo ottenuto se avessimo riguardato il centro di gravità come un punto fisso preso per origine dei momenti.

Applicazione del Principio di D'Alembert alle forze impulsive.

47. Se una forza F agisce sopra un elemento di massa m sempre nella stessa direzione, l'equazione del moto è

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

dove v è la velocità dell'elemento al tempo t. Sia T l'intervallo durante il quale la forza agisce, e siano v, v' le velocità al principio ed alla fine di quell'intervallo. Allora

$$m(v'-v)=\int_0^T F\,dt.$$

Ora supponiamo che la forza F cresca senza limite, mentre l'intervallo T decresce senza limite. Allora l'integrale può avere un limite finito. Sia questo limite P. Allora l'equazione diviene

$$m(v'-v)=P.$$

La velocità nell'intervallo T è cresciuta o diminuita da v a v'. Supponendo che la velocità sia rimasta finita, sia V il suo massimo valore durante questo intervallo. Allora lo spazio descritto è minore di VT. Ma nel limite questo svanisce. Quindi l'elemento non si è mosso durante l'azione della forza F. Esso non ha avuto il tempo di muoversi ma la sua velocità si è subitaneamente mutata da v in v'.

Possiamo considerare di aver trovato un'adeguata misura di una forza quando da quella misura possiamo dedurre tutti gli effetti della forza. Nel caso delle forze finite dobbiamo determinare il cambiamento di posizione ed il cambiamento nella velocità dell'elemento. È necessario perciò di dividere l'intero tempo dell'azione in tempi elementari e determinare l'effetto della forza durante ciascuno di questi. Ma nel caso delle forze infinite che agiscono per un tempo infinitamente piccolo, il cambiamento di posizione è zero, ed il cambiamento di velocità è il solo elemento da determinare. È perciò più conveniente di riunire l'intera forza spesa in una misura. Una tale forza si chiama un impulso. Esso si può definire come il limite di una forza che è infinitamente

grande, ma agisce solamente durante un tempo infinitamente piccolo. È chiaro che non vi sono di tali forze in natura, ma vi sono forze che sono grandissime, ed agiscono solamente durante un tempo piccolissimo. Il colpo di un martello è una forza di questa specie. Esse si possono trattare come se fossero impulsi, ed i risultati saranno più o meno esatti secondo la grandezza della forza e la brevità del tempo di azione. Esse si possono anche trattare come se fossero forze finite, e si può trovare lo spostamento del corpo durante il tempo di azione della forza.

La quantità P si può prendere come misura della forza. Una forza impulsiva si misura per mezzo dell'intera quantità di moto generata dall'impulso.

48. *Nel determinare l' effetto di un impulso su di un corpo, l'effetto di tutte le forze finite che agiscono sul corpo nello stesso tempo si può trascurare.*

Infatti una forza finita f agisca sul corpo nello stesso tempo di una forza impulsiva F. Allora come sopra abbiamo

$$v' - v = \frac{\int_0^T F\,dt}{m} + \frac{\int_0^T f\,dt}{m}$$

$$= \frac{P}{m} + \frac{fT}{m}.$$

Ma nel limite fT svanisce. Similmente la forza f si può omettere nell' equazione dei momenti.

49. *Trovare le equazioni generali del moto di un sistema sollecitato simultaneamente da un numero qualunque d'impulsi.*

Siano u, v, w, u', v', w' le velocità di un elemento di massa m parallele agli assi immediatamente prima ed immediatamente dopo l' azione degl' impulsi. Siano X', Y', Z' le parti risolute dell' impulso su di m parallele agli assi.

Prendendo la stessa notazione come sopra, abbiamo l'equazione

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma mX,$$

o integrando

$$\Sigma m(u' - u) = \Sigma m \int_0^T X\,dt$$

$$= \Sigma X' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Similmente abbiamo le equazioni

$$\Sigma m (v' - v) = \Sigma Y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)},$$

$$\Sigma m (w' - w) = \Sigma Z' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}.$$

Inoltre l'equazione

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma m (xY - yX)$$

diviene con l'integrazione

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m \left(x \int Y dt - y \int X dt \right),$$

o presa tra i limiti,

$$\Sigma m \{ x (v' - v) - y (u' - u) \} = \Sigma (xY' - yX') \ldots\ldots \text{(4)},$$

e le altre due equazioni diventano

$$\Sigma m \{ y (w' - w) - z (v' - v) \} = \Sigma (yZ' - zY') \ldots\ldots \text{(5)},$$

$$\Sigma m \{ z (u' - u) - x (w' - w) \} = \Sigma (zX' - xZ') \ldots\ldots \text{(6)}.$$

In tutte le investigazioni seguenti si troverà conveniente di adoperare lettere accentate per dinotare gli stati del moto dopo dell' impulso che corrispondono a quelli dinotati dalle stesse lettere senza accenti prima dell' azione dell' impulso. Poichè i cambiamenti in direzione e grandezza delle velocità dei diversi elementi dei corpi sono i soli oggetti della ricerca, sarà più conveniente di esprimere le equazioni del moto in termini di queste velocità, e di evitare l'introduzione di simboli come $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

50. Nell' applicare il Principio di D'Alembert alle forze impulsive il solo cambiamento che si deve fare è nel modo di misurare le forze effettive. Se (u, v, w), (u', v', w') sono le parti risolute della velocità di un elemento qualunque, immediatamente prima ed immediatamente dopo dell' impulso, e se m è la sua massa, le forze effettive saranno misurate da $m(u'-u)$, $m(v'-v)$, ed $m(w'-w)$. La quantità mf nell' Art. 37 si deve riguardare come la misura della forza impulsiva che, se l'elemento fosse separato dal resto del corpo, produrrebbe questi cambiamenti della quantità di moto.

In questo caso se seguiamo la notazione degli Art. 42 e 43, la

parte risoluta della forza effettiva nella direzione dell'asse delle z è la differenza dei valori di $\Sigma m \frac{dz}{dt}$ immediatamente prima ed immediatamente dopo l'azione degl'impulsi, e questa è la stessa della differenza dei valori di $M\frac{dz'}{dt}$ agli stessi istanti. Nello stesso modo il momento delle forze effettive rispetto all'asse delle z sarà la differenza dei valori di

$$\Sigma m \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

immediatamente prima ed immediatamente dopo degl'impulsi.

Possiamo perciò estendere la proposizione generale dell'Art. 45 alle forze impulsive nel modo seguente.

Siano (u,v,w), (u',v',w') le velocità del centro di gravità di un corpo rigido qualunque di massa M immediatamente prima ed immediatamente dopo l'azione degl'impulsi risolute parallelamente a tre assi fissi rettangolari qualunque. Siano (h_1, h_2, h_3), (h_1', h_2', h_3') i tre momenti della quantità di moto relativa al centro di gravità rispetto a tre assi fissi in direzione e che s'incontrano nel centro di gravità, i momenti essendo presi immediatamente prima ed immediatamente dopo degl'impulsi. Allora le forze effettive del corpo sono equivalenti alle tre forze effettive $M(u'-u)$, $M(v'-v)$, $M(w'-w)$ agenti nel centro di gravità parallelamente agli assi rettangolari insieme con le tre coppie effettive $(h_1'-h_1)$, $(h_2'-h_2)$, $(h_3'-h_3)$ rispetto a quegli assi.

Queste forze e coppie effettive essendo rivolte in senso contrario si faranno equilibrio con le forze impresse. Le equazioni di equilibrio si possono poi formare secondo le regole della Statica.

ESEMPII.

1. Due elementi che si muovono nello stesso piano sono proiettati in direzioni parallele ma opposte con velocità inversamente proporzionali alle loro masse. Trovare il movimento del loro centro di gravità.

2. Una persona è situata sopra una tavola perfettamente levigata, mostrare in qual modo ne può scendere.

3. Spiegare in qual modo una persona seduta su di una sedia può muovere la sedia attraverso la stanza con una serie di salti, senza toccare il suolo con i piedi.

4. La traiettoria del centro di gravità di una bomba lanciata da un pezzo di artiglieria nel vuoto è una parabola, ed il suo movimento non è alterato dallo scoppio della bomba.

5. Una verga che gira uniformemente in un piano orizzontale intorno ad un perno nella sua estremità, si spezza subitaneamente in due: determinare il movimento di ciascuna parte.

6. Un disco circolare è capace di movimento intorno ad una tangente orizzontale che gira con uniforme velocità angolare Ω intorno ad un asse verticale pel punto di congiunzione che è fisso. Dimostrare che se il disco è inclinato sotto un angolo costante α all' orizzonte, $\Omega^2 \operatorname{sen} \alpha = \frac{4g}{5a}$.

CAPITOLO III.

Movimento intorno ad un asse fisso.

51. *Un corpo rigido può rotare liberamente intorno ad un asse fisso nel corpo e nello spazio, trovare il momento delle forze effettive rispetto all' asse di rotazione.*

Si prenda come piano di relazione un piano qualunque che passa per l'asse e fisso nello spazio, e sia θ l'angolo che un altro piano condotto per l' asse e fisso nel corpo fa col primo piano. Sia m la massa di un elemento qualunque del corpo, r la sua distanza dall'asse, e φ l'angolo che il piano condotto per l' asse e per l' elemento m fa col piano di relazione.

La velocità dell' elemento m è $r\frac{d\varphi}{dt}$ in una direzione perpendicolare al piano che passa per l' asse e per l' elemento. Il momento della quantità di moto di questo elemento rispetto all'asse è evidentemente $mr^2\frac{d\varphi}{dt}$. Quindi il momento delle quantità di moto di tutti gli elementi è $\Sigma\left(mr^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$. Siccome gli elementi del corpo sono rigidamente connessi tra loro, è chiaro che $\frac{d\varphi}{dt}$ è lo stesso per ogni elemento, ed eguale a $\frac{d\theta}{dt}$. Quindi il momento delle quantità di moto di tutti gli elementi del corpo rispetto all'asse è $\Sigma mr^2\frac{d\theta}{dt}$, cioè il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse moltiplicato per la velocità angolare.

Le accelerazioni dell' elemento m sono $r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ e $-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ perpendicolarmente, e secondo la direzione in cui è misurata r, il momento della forza motrice di m rispetto all' asse è $mr^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ quindi il momento delle forze motrici di tutti gli elementi del corpo rispetto all' asse è $\Sigma\left(mr^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)$. Per lo stesso ragionamento di sopra questo è eguale a $\Sigma mr^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, cioè al momento d'inerzia del corpo rispetto all' asse moltiplicato per l'accelerazione angolare.

52. *Determinare il movimento di un corpo intorno ad un asse fisso sotto l'azione di forze qualunque.*

Pel principio di d'Alembert le forze effettive rivolte in senso contrario si faranno equilibrio con le forze impresse. Per evitare d'introdurre le reazioni ignote dell'asse, prendiamo i momenti rispetto all'asse.

In primo luogo, siano le forze impulsive. Siano ω, ω' le velocità angolari del corpo immediatamente prima ed immediatamente dopo dell'azione delle forze. Allora, seguendo la notazione dell'ultimo articolo,

$$\omega' \cdot \Sigma m r^2 - \omega \cdot \Sigma m r^2 = L,$$

in cui L è il momento delle forze impresse rispetto all'asse; onde

$$\omega' - \omega = \frac{\text{momento delle forze rispetto all' asse}}{\text{momento d'inerzia rispetto all'asse}}.$$

Questa equazione determinerà il cambiamento della velocità angolare prodotto dall' azione delle forze.

In secondo luogo, siano le forze finite. Allora prendendo i momenti rispetto all' asse, abbiamo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \Sigma m r^2 = L,$$

onde $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\text{momento delle forze rispetto all' asse}}{\text{momento d' inerzia rispetto all' asse}}.$$

Questa equazione integrata darà i valori di θ e $\frac{d\theta}{dt}$ ad ogni tempo. Due costanti indeterminate compariranno nel corso della soluzione. Queste si debbono determinare per mezzo dei valori iniziali di θ e $\frac{d\theta}{dt}$. Così il movimento si può completamente determinare.

Sul Pendolo.

53. *Un corpo si muove intorno ad un asse fisso orizzontale sollecitato solamente dalla gravità, determinare il movimento.*

Si prenda il piano verticale che passa per l' asse per piano di relazione, ed il piano per l' asse e pel centro di gravità come il piano fisso nel corpo. Allora l' equazione del moto è

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\text{momento delle forze}}{\text{momento d'inerzia}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$= -\frac{Mgh \operatorname{sen} \theta}{M(k^2 + h^2)},$$

dove h è la distanza del centro di gravità dall'asse ed Mk^2 è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse condotto pel centro di gravità e parallelo all'asse fisso. Quindi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gh}{k^2 + h^2} \operatorname{sen} \theta = 0 \text{ .... } (2).$$

L'equazione (2) non si può integrare in termini finiti, ma se le oscillazioni sono piccole, possiamo trascurare il cubo e le potenze superiori di θ e l'equazione diverrà

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gh}{k^2 + h^2} \theta = 0.$$

Quindi il tempo di una completa oscillazione è

$$2\pi\sqrt{\frac{k^2 + h^2}{gh}}.$$

L'equazione del moto di un elemento di massa qualunque sospeso da una corda l è

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0 \text{ .... } (3),$$

la quale si può dedurre dall'equazione (2) ponendo $k=0$ ed $h=l$. Quindi i movimenti angolari della corda e del corpo sotto le stesse condizioni iniziali saranno identiche se

$$l = \frac{k^2 + h^2}{h} \text{ .... } (4).$$

Questa lunghezza si chiama la « lunghezza del pendolo semplice equivalente ».

Per G, centro di gravità del corpo, si tiri la perpendicolare all'asse di rotazione che l'incontri in C. Allora C si chiama il *centro di sospensione*. Si prolunghi CG in O sicchè $CO=l$. Allora O si chiama il *centro di* oscillazione. Se l'intera massa del corpo fosse riunita nel centro di oscillazione e sospesa da un filo al centro di sospensione, il suo movimento angolare ed il tempo dell'oscillazione sarebbero gli stessi come pel corpo nelle stesse circostanze iniziali.

L'equazione (4) si può mettere sotto un'altra forma. Poichè $CG=h$ ed $OG=l-h$, abbiamo

$$CG \cdot OG = k^2.$$

Questa equazione mostra che se O si fa centro di sospensione, l'asse essendo parallelo all'asse rispetto al quale si prese k, al-

lora C sarà il centro di oscillazione. Così *i centri di oscillazione e di sospensione si possono scambiare tra loro ed il tempo dell'oscillazione rispetto a ciascuno è lo stesso.*

Se il tempo dell'oscillazione è dato, l è data e l'equazione (4) darà due valori di h. Siano questi valori h_1, h_2. Si descrivano due cilindri che abbiano per asse quella linea retta rispetto alla quale si prese il raggio di girazione k, e siano i raggi di questi cilindri h_1, h_2. Allora il tempo dell'oscillazione del corpo intorno ad una generatrice qualunque di questi cilindri è sempre lo stesso, e prossimamente eguale a $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Con lo stesso asse si descriva un altro cilindro di raggio k. Allora $l = 2k + \frac{(h-k)^2}{h}$, quindi l è sempre maggiore di $2k$, decresce continuamente al diminuire di h e si avvicina al valore k. Così la lunghezza del pendolo equivalente decresce continuamente a misura che l'asse di sospensione si avvicina dall'esterno alla circonferenza di questo terzo cilindro. Quando l'asse di sospensione è una linea generatrice del cilindro la lunghezza del pendolo equivalente è $2k$. Quando l'asse di sospensione è nell'interno del cilindro e si avvicina al centro di gravità la lunghezza del pendolo equivalente cresce continuamente e diviene infinita quando l'asse passa pel centro di gravità.

Il tempo dell'oscillazione è perciò minimo quando l'asse è una linea generatrice del cilindro circolare il di cui raggio è k. Ma il tempo rispetto all'asse così trovato non è un minimo assoluto. Esso è un minimo per tutti gli assi paralleli ad una data linea retta nel corpo. Per trovare l'asse intorno al quale il tempo è assolutamente un minimo dobbiamo trovare l'asse rispetto al quale k è un minimo. Ora si è dimostrato nell'Art. 16, che di tutti gli assi che passano per G l'asse rispetto al quale il momento d'inerzia è minimo o massimo è uno degli assi principali. Quindi l'asse rispetto al quale il tempo dell'oscillazione è un minimo è parallelo a quell'asse principale condotto per G rispetto al quale il momento d'inerzia è minimo. E se Mk^2 è il momento d'inerzia rispetto a quell'asse, l'asse di sospensione è ad una distanza k misurata in una direzione qualunque dall'asse principale.

54. Le oscillazioni di un corpo rigido si possono adoperare per determinare il valore numerico della forza acceleratrice di gravità. Sia L la lunghezza di un pendolo semplice equivalente di un corpo qualunque, e T il tempo di una completa oscillazione.

Allora abbiamo se le oscillazioni sono piccole,

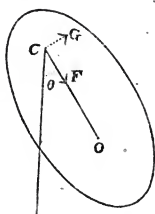
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Così g si può determinare quando si conoscono L e T.

Vi è un altro uso al quale si può applicare la determinazione della lunghezza di un pendolo semplice equivalente; esso si può adottare come un campione di lunghezza essendo invariabile e capace in ogni tempo di essere ritrovato.

Pressioni sull' asse fisso.

55. *Un corpo si muove intorno ad un asse fisso sotto l' azione di forze qualunque, trovare le pressioni sull' asse.*

In primo luogo, supponiamo che il corpo e le forze siano simmetriche rispetto al piano condotto pel centro di gravità perpendicolarmente all'asse. Allora è evidente che le pressioni sull'asse sono riducibili ad una forza sola nel centro di sospensione C.

Siano F, G le azioni del punto di sostegno sul corpo risolute secondo e perpendicolarmente a CO, essendo O il centro di gravità. Siano X, Y le somme delle parti risolute delle forze impresse nelle stesse direzioni, ed L il loro momento intorno a C. Sia $CO=h$ e θ=angolo che CO fa con una linea retta qualunque fissa nello spazio.

Prendendo i momenti rispetto a C, abbiamo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{L}{M(k^2+h^2)} \quad\text{.................... (1).}$$

Il movimento del centro di gravità è lo stesso come se tutte le forze agissero in quel punto. Ora esso descrive un circolo intorno a C; quindi, risolvendo secondo la tangente e la normale, abbiamo

$$h\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Y+G}{M} \quad\text{...................... (2)}$$

$$-h\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{X+F}{M} \quad\text{................ (3).}$$

L'equazione (1) dà i valori di $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ e $\frac{d\theta}{dt}$, ed allora le pressioni si possono trovare per mezzo delle equazioni (2) e (3).

Se la sola forza che agisce sul corpo è quella di gravità, e se il corpo parte dalla quiete in quella posizione che rende CO orizzontale, allora abbiamo

$$X = Mg\cos\theta, \quad Y = -Mg\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad L = -Mgh\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

onde
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh}{k^2+h^2}\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

integrando, abbiamo

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C + \frac{2gh}{k^2+h^2}\cos\theta,$$

ma quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{dt}$ svanisce, quindi $C=0$; sostituendo questi valori in (2) e (3), abbiamo

$$\left.\begin{aligned} -F' &= Mg\cos\theta\cdot\frac{k^2+3h^2}{k^2+h^2} \\ G &= Mg\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\frac{k^2}{k^2+h^2} \end{aligned}\right\},$$

in cui θ è l'angolo che CO fa con la verticale.

Sia ψ l'angolo che la direzione della pressione in C fa con la linea CO, l'angolo essendo misurato da CO in basso a sinistra, allora

$$\cot\psi = \left(1 + 3\frac{h^2}{k^2}\right)\cot\theta,$$

che è una formola conveniente per determinare la direzione della pressione.

Sia mR la risultante di F e G, e sia

$$a = g\frac{k^2+3h^2}{k^2+h^2} \quad \text{e} \quad b = g\frac{k^2}{k^2+h^2},$$

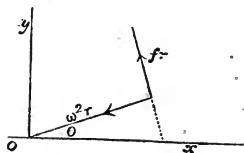
allora
$$\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\psi}{b^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Si costruisca un'ellisse col centro C e gli assi eguali ad a e b misurati secondo e perpendicolarmente a CO. Allora la pressione risultante varia come il diametro secondo il quale agisce. E la

direzione si può trovare così; il circolo ausiliario incontri la verticale in V, e la perpendicolare da V sopra CO incontri l'ellisse in R. Allora CR è la direzione della pressione.

56. *In secondo luogo*, supponiamo che non vi sia simmetria nel corpo o nelle forze.

Si prenda l'asse fisso come asse delle z essendo qualunque l'origine ed il piano delle xz. Questi li sceglieremo in seguito in modo da semplificare il nostro procedimento per quanto sarà possibile. Siano x', y', z' le coordinate del centro di gravità al tempo t.

Sia ω la velocità angolare del corpo, f l'accelerazione angolare, sicchè $f = \frac{d\omega}{dt}$.

Ora ogni elemento m del corpo descrive un circolo intorno all'asse, quindi le sue accelerazioni secondo e perpendicolarmente al raggio vettore r dall'asse sono $-\omega^2 r$ ed fr. Sia θ l'angolo che r fa col piano delle xz in un tempo qualunque, allora dalla risoluzione delle forze è chiaro che

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos\theta - fr \operatorname{sen}\theta$$

$$\left.\begin{aligned} &= -\omega^2 x - fy \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\omega^2 y + fx \end{aligned}\right\}.$$

Queste equazioni si possono anche ottenere differenziando le equazioni $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ due volte, rammentando che r è costante.

Si concepisca il corpo fisso all'asse in due punti, alle distanze a ed a' dall'origine, e siano le reazioni dei punti sul corpo risolute parallelamente agli assi rispettivamente F, G, H; F', G', H'.

Le equazioni del moto allora danno

$$\begin{aligned} \Sigma m X + F + F' &= \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} \\ &= \Sigma m(-\omega^2 x - fy) \\ &= -\omega^2 M x' - f M y' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1), \end{aligned}$$

$$\Sigma m Y + G + G' = \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2}$$
$$= \Sigma m (-\omega^2 y + fx)$$
$$= -\omega^2 M y' + f M x' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(2),$$

$$\Sigma m Z + H + H' = \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2}$$
$$= 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(3).$$

Prendendo i momenti rispetto agli assi, abbiamo

$$\Sigma m (yZ - zY) - Ga - G'a' = \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$
$$= -\Sigma m \left(z \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$
$$= \omega^2 \Sigma m y z - f \Sigma m x z \;\ldots\ldots\ldots \;(4),$$

introducendo semplicemente z nei risultati in (2),

$$\Sigma m (zX - xZ) + Fa + F'a' = \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$
$$= -\omega^2 \Sigma m x z - f \Sigma m y z \;\ldots\ldots \;(5),$$

$$\Sigma m (xY - yX) = \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right)$$
$$= \Sigma m\, r^2 \frac{d\omega}{dt}$$
$$= M k'^2 f \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(6).$$

L'equazione (6) serve a determinare f ed ω, e le equazioni (1), (2), (4), (5) allora determinano F, G, F', G'; H ed H' sono indeterminate, ma la loro somma è data dall'equazione (3).

Esaminando queste equazioni, vediamo che esse si semplificherebbero grandemente in due casi.

Primo, se l'asse delle z è un asse principale nell'origine,

$$\Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m y z = 0,$$

ed il calcolo dei secondi membri delle equazioni (4) e (5) sarebbe di soverchio. Quindi, nel trattare un problema di tal fatta, dovremmo, se è possibile, scegliere in modo l'origine che l'asse di rotazione sia un asse principale del corpo in quel punto.

Secondo, eccetto la determinazione di f ed ω integrando l'equazione (6), l'intero procedimento è semplicemente una sostituzione algebrica di f ed ω nelle rimanenti equazioni. Quindi i nostri risultati saranno ancora esatti se scegliamo il piano delle xz in modo da contenere il centro di gravità nel momento che si considera; ciò renderà $y'=0$, e così le equazioni (1) e (2) saranno semplificate.

57. Se le forze che agiscono sul corpo sono impulsive, le equazioni richiederanno alcune modificazioni.

Siano ω, ω' le velocità angolari del corpo immediatamente prima ed immediatamente dopo l'azione degl'impulsi. Nel caso in cui il corpo e le forze sono in simmetria le equazioni (1), (2), (3) dell'Art. 55 diventano rispettivamente

$$\omega' - \omega = \frac{L}{M(k^2 + h^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$h(\omega' - \omega) = \frac{Y + G}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$0 = \frac{X + F}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

dove tutte le lettere hanno lo stesso significato come sopra, eccetto che F, G, X, Y sono ora forze impulsive invece di forze finite.

Consideriamo in secondo luogo il caso in cui le forze sul corpo non sono simmetriche. Siano u, v, w, u', v', w' le velocità risolute parallelamente agli assi di un elemento qualunque m di cui le coordinate sono x, y, z. Allora $u = -y\omega$, $u' = -y\omega'$, $v = x\omega$, $v' = x\omega'$, e w, w' sono entrambe zero.

Le diverse equazioni dell'Art. 56 saranno allora rimpiazzate dalle seguenti:

$$\begin{aligned} \Sigma X + F + F' &= \Sigma m(u' - u) \\ &= -\Sigma my(\omega' - \omega) \\ &= -My'(\omega' - \omega) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma Y + G + G' &= \Sigma m(v' - v) \\ &= \Sigma mx(\omega' - \omega) \\ &= Mx'(\omega' - \omega) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2), \end{aligned}$$

$$\Sigma Z + H + H' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

$$\Sigma(yZ - zY) - Ga - G'a' = \Sigma m\{y(w' - w) - z(v' - v)\}$$
$$= -\Sigma mxz\cdot(\omega' - \omega) \;\ldots\ldots\ldots\; (4),$$
$$\Sigma(zX - xZ) + Fa + F'a' = \Sigma m\{z(u' - u) - x(w' - w)\}$$
$$= -\Sigma myz\cdot(\omega' - \omega) \;\ldots\ldots\ldots\; (5),$$
$$\Sigma(xY - yX) = \Sigma m(x^2 + y^2)\cdot(\omega' - \omega) \;\ldots.\; (6).$$

Queste sei equazioni sono sufficienti per determinare ω', F, F'', G, G' e la somma $H+H'$ delle due pressioni secondo l'asse.

Queste equazioni si semplificano quando l'origine si può scegliere in modo che l'asse di rotazione sia un asse principale in quel punto. In questo caso i secondi membri delle equazioni (4) e (5) svaniscono. Inoltre se il piano delle xz si fa passare pel centro di gravità del corpo, abbiamo $y=0$, ed il secondo membro dell'equazione (1) svanisce.

58. È talvolta importante di determinare anticipatamente se le pressioni sull'asse fisso si possano ridurre o no ad una sola risultante. La condizione generale è alquanto complicata, ma vi sono alcuni casi molto semplici.

Sia l'asse di rotazione un asse principale in un punto O della sua lunghezza, e le forze siano tali che i loro momenti rispetto a due assi qualunque in O ad angoli retti all'asse di rotazione siano zero. In questo caso, se prendiamo O per origine, i termini $\Sigma m(yZ-zY)$ e $\Sigma m(zX-xZ)$ nei primi membri delle equazioni (4) e (5) sono zero. I secondi membri svaniscono ancora, poichè l'asse delle z è un asse principale nell'origine. Quindi le equazioni diventano

$$\left.\begin{aligned} Ga + G'a' = 0 \\ Fa + F'a' = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Queste mostrano che i momenti delle pressioni sui punti fissi dell'asse rispetto agli assi delle coordinate sono zero. Quindi le pressioni sono insieme equivalenti ad una sola forza che agisce in O.

La grandezza di questa pressione unica si può trovare molto convenientemente col metodo dell'Art. 55, anche quando non vi sia simmetria nel corpo o nelle forze.

Per esempio, supponiamo che il corpo sia in movimento intorno ad un asse fisso orizzontale, parallelo ad uno degli assi principali nel centro di gravità G. Sia GO perpendicolare all'asse in O. Allora per l'Art. 29 l'asse è un asse principale in O. Inol-

tre il peso del corpo che agisce in G non ha alcun momento rispetto ad un asse qualunque perpendicolare in O all'asse di rotazione. Quindi per ciò che precede, le pressioni sull'asse sono equivalenti ad una sola forza in O.

59. Se un corpo è messo in rotazione intorno ad un asse qualunque che è un asse principale in un punto O della sua lunghezza, e se non vi sono forze impresse che agiscono sul corpo, segue immediatamente da queste condizioni che le pressioni sull'asse sono equivalenti ad una sola forza risultante che agisce in O. Quindi se O è fisso nello spazio, il corpo continuerà a rotare intorno a quell'asse come se esso fosse anche fisso nello spazio. Un tale asse si chiama un *asse permanente di rotazione* nel punto O.

Se il corpo è interamente libero e gira però intorno ad un asse di rotazione che non altera la sua posizione nello spazio, possiamo supporre che sia fisso un punto qualunque a piacere nell'asse. In questo caso l'asse deve essere un asse principale in ogni punto della sua lunghezza. Esso per l'Art. 24 deve quindi passare pel centro di gravità.

60. Vi è un altro caso in cui le pressioni sull'asse fisso si possono ridurre ad una pressione risultante unica. Supponendo che una tale pressione risultante unica esista, possiamo prendere come origine quel punto dell'asse in cui esso è intersegato dalla risultante unica. Allora i momenti delle due pressioni sull'asse di rotazione rispetto agli assi coordinati svaniranno. Quindi le equazioni (4), (5) e (6) dell'Art. 57 diventano

$$\left.\begin{aligned} L &= \omega^2 \Sigma m\,yz - f\Sigma m\,xz \\ M &= -\,\omega^2 \Sigma m\,xz - f\Sigma m\,yz \\ N &= Mk'^2 f \end{aligned}\right\},$$

dove abbiamo scritto L, M, N per i tre momenti $\Sigma m(yZ - zY)$, etc. delle forze impresse rispetto agli assi coordinati.

Se il corpo parte dalla quiete abbiamo in quell'istante $\omega = 0$.

Il piano della coppia di cui le parti risolute rispetto agli assi sono L, M, N si sa per la Statica essere

$$LX + MY + NZ = 0,$$

o nel nostro caso,

$$-\,\Sigma m\,xzX - \Sigma m\,yzY + Mk'^2 Z = 0.$$

Si costruisca l'ellissoide dei momenti relativo al punto fisso, e sia la sua equazione

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = \varepsilon^4.$$

L'equazione del piano diametrale corrispondente all'asse delle Z è

$$-EX - DY + CZ = 0.$$

Quindi il piano della coppia risultante deve essere il piano diametrale corrispondente all'asse di rotazione.

Poichè le pressioni sull'asse sono equivalenti ad una forza risultante unica che agisce in un punto O dell'asse, possiamo supporre che sia fisso questo punto solo e l'asse di rotazione sia del resto libero. Se quindi un corpo in riposo con un punto fisso è sollecitato da una coppia qualunque, esso incomincerà a rotare intorno alla linea diametrale corrispondente al piano della coppia rispetto all'ellissoide dei momenti relativo al punto fisso.

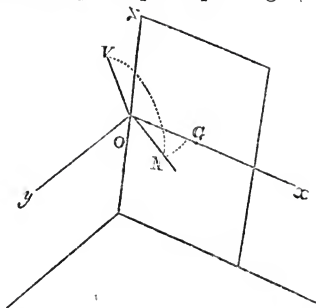
Così il corpo incomincerà a rotare intorno ad una perpendicolare al piano della coppia solamente quando il piano della coppia è parallelo ad uno dei piani principali del corpo corrispondenti al punto fisso.

Se la coppia agente è una coppia impulsiva, le equazioni del moto, per l'Art. 57, saranno le stesse di quelle ottenute sopra quando si pone ω zero e si scrive ω' per f. Onde ne seguirà la stessa conclusione.

Il corpo in generale non continuerà a girare intorno alla linea diametrale.

61. Es. *Una porta è sospesa per mezzo di due gangheri da un asse fisso che fa un angolo α con la verticale. Trovare il movimento e le pressioni sui gangheri.*

Poichè l'asse fisso è evidentemente un asse principale nel punto medio, prenderemo questo punto per origine. Inoltre prende-

remo il piano dello xz in modo che contenga il centro di gravità della porta nell'istante che si considera.

La sola forza che agisce sulla porta è la gravità, la quale si può supporre agire nel centro di gravità. Dobbiamo prima risolvere questa parallelamente agli assi. Sia φ l'angolo che il piano della porta fa col piano verticale condotto per l'asse di sospensione. Se conduciamo un piano ZON in modo che la sua traccia ON sul piano XOY faccia un angolo φ con l'asse delle x, questo sarà il piano verticale che passa per l'asse; e se tiriamo OV in questo piano che faccia l'angolo $ZOV=\alpha$, OV sarà verticale. Quindi le parti risolute della gravità sono

$$X = g \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi, \quad Y = g \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi,$$
$$Z = -g\cos\alpha.$$

Le sei equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} Mg \operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + F + F' &= \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} \\ &= \Sigma m(-\omega^2 x) \\ &= -\omega^2 Mx' \ \ldots\ldots \ (1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mg \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi + G + G' &= \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} \\ &= \Sigma m(fx) \\ &= fMx' \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -Mg\cos\alpha + H + H' &= \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} \\ &= 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3), \end{aligned}$$

$$-Ga + G'a' = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (4),$$

$$Mg\cos\alpha\cdot x' + Fa - F'a = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (5),$$

perchè l'asse fisso è un asse principale

$$-Mg\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi\cdot x' = Mk'^2\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (7).$$

Integrando l'ultima equazione, abbiamo

$$C + 2g\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi\cdot x' = k'^2\omega^2.$$

Si supponga la porta inizialmente in quiete, col suo piano che faccia un angolo β col piano verticale condotto per l'asse; allora quando $\varphi=\beta$, $\omega=0$; quindi

$$\left.\begin{aligned} k'^2\omega^2 &= 2gx'\operatorname{sen}\alpha(\cos\varphi - \cos\beta) \\ \text{e} \qquad k'^2 f &= -g\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi\cdot x' \end{aligned}\right\}.$$

Con la sostituzione nelle prime quattro equazioni si possono trovare F, F', G, G'.

Centro di Percossa.

62. Quando l'asse fisso è dato ed il corpo può essere percosso in modo che non vi sia alcuna pressione impulsiva sull'asse, ogni punto nella linea di azione della forza si chiama un *centro di percossa.*

Quando la linea di azione della percossa è data, l'asse intorno al quale il corpo incomincia a girare si chiama *l' asse di spontanea rotazione.* Esso evidentemente coincide con la posizione dell'asse fisso nel primo caso.

63. *Un corpo è capace di girare liberamente intorno ad un asse fisso. Determinare le condizioni affinchè vi sia un centro di percossa e trovare la sua posizione.*

Si prenda l'asse fisso come asse delle z, ed il piano delle xz passi pel centro di gravità del corpo. Siano X, Y, Z le parti risolute dell'impulso, e siano ξ, η, ζ le coordinate di un punto qualunque nella sua linea di azione. Sia Mk'^2 il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso. Allora poichè $y'=0$, le equazioni del moto sono, per l'Art. 61,

$$\left.\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= Mx'(\omega' - \omega) \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)},$$

$$\left.\begin{aligned} \eta Z - \zeta Y &= -(\omega' - \omega)\,\Sigma m\,xz \\ \zeta X - \xi Z &= -(\omega' - \omega)\,\Sigma m\,yz \\ \xi Y - \eta X &= (\omega' - \omega)\,Mk'^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(2)}.$$

Le pressioni impulsive sull'asse fisso si omettono poichè per ipotesi esse non esistono.

Da queste equazioni possiamo dedurre le condizioni seguenti.

I. Da (1) vediamo che $X=0$, $Z=0$, e quindi la forza deve agire perpendicolarmente al piano che passa per l'asse e pel centro di gravità.

II. Sostituendo da (1) nelle prime due equazioni di (2) abbiamo $\Sigma m\,yz=0$ e $\zeta=\dfrac{\Sigma m\,xz}{Mx'}$. Poichè l'origine si può prendere dovunque nell'asse di rotazione, si scelga in modo che $\Sigma m\,xz=0$. Allora l'asse delle z deve essere un asse principale nel punto dove il piano che passa per la linea di azione della percossa perpendicolarmente all'asse incontra l'asse. Sicchè non vi può es-

sere centro di percossa a meno che l'asse non sia un asse principale in qualche punto della sua lunghezza.

III. Sostituendo da (1) nell'ultima equazione di (2) abbiamo $\xi = \frac{k'^2}{h}$. Per l'Art. 53 questa è l'equazione per determinare il centro di oscillazione del corpo rispetto all'asse fisso considerato come un asse di sospensione. Quindi la distanza perpendicolare tra la linea di azione dell'impulso e l'asse fisso deve essere eguale alla distanza del centro di oscillazione dall'asse.

Se l'asse fisso è parallelo ad un asse principale nel centro di gravità, la linea d'azione della percossa passerà pel centro di oscillazione.

ESEMPII.

1. Trovare il tempo delle piccole oscillazioni di un cubo (1) quando un lato è fisso, (2) quando la diagonale di una delle sue facce è fissa; l'asse in tutti e due i casi essendo orizzontale.

Risultato. Se $2a$ è un lato del cubo, la lunghezza del pendolo semplice equivalente è nel primo caso $\frac{4\sqrt{2}}{3}a$, e nel secondo $\frac{5}{3}a$.

2. Una lamina ellittica è tale che quando oscilla intorno ad un lato retto come un asse orizzontale, l'altro lato retto passa pel centro di oscillazione; dimostrare che l'eccentricità è $=\frac{1}{2}$.

3. Un arco circolare oscilla intorno ad un asse condotto pel suo punto medio perpendicolarmente al piano dell'arco. Dimostrare che la lunghezza del pendolo semplice equivalente è indipendente dalla lunghezza dell'arco, ed è eguale al doppio del raggio.

4. La densità di una verga varia come la distanza da un estremo, trovare l'asse perpendicolare ad essa rispetto al quale il tempo dell'oscillazione è un minimo.

Risultato. L'asse passa per l'uno o l'altro dei due punti di cui la distanza dal centro di gravità è $\frac{\sqrt{2}}{6}a$, dove a è la lunghezza della verga.

5. Trovare quale asse nell'area di un ellisse deve essere fisso affinchè il tempo di una piccola oscillazione sia un minimo.

Risultato. L'asse deve essere parallelo all'asse maggiore, e bisecare il semiasse minore.

6. Un bastone uniforme pende liberamente da un estremo, l'altro estremo essendo rasente il suolo. Una velocità angolare in un piano verticale si comunica allora al bastone, e quando esso si è innalzato per un angolo di 90°, l'estremo dal quale pendeva è lasciato libero. Quale deve essere la velocità angolare iniziale affinchè nel cadere sul suolo esso possa cadere ritto in piedi?

Risultato. La richiesta velocità angolare ω è data da

$$\omega^2 = \frac{3g}{2a} + \frac{g}{2a} \frac{\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}^2}{(2n+1)\frac{\pi}{2}+1},$$

dove n è un intero qualunque, e $2a$ è la lunghezza del bastone.

7. Due corpi si possono muovere liberamente ed indipendentemente sotto l'azione della gravità intorno allo stesso asse orizzontale, le loro masse sono m, m', e le distanze dei loro centri di gravità dagli assi sono h, h'. Se le lunghezze dei loro pendoli semplici equivalenti sono L, L', dimostrare che quando sono uniti insieme la lunghezza del pendolo equivalente sarà

$$\frac{mhL + m'h'L'}{mh + m'h'}.$$

8. Una lamina uniforme pesante in forma di un settore di circolo è sospesa ad un asse orizzontale parallelo al raggio che biseca l'arco, ed oscilla sotto l'azione della gravità. Mostrare che le pressioni sull'asse sono equivalenti ad una sola forza, e trovare la sua grandezza. Si vegga l'Art. 58.

9. Un ellissoide solido è fisso nel suo centro, ed è sollecitato da una coppia in un piano di cui i coseni di direzione riferiti ai diametri principali sono (lmn). Dimostrare che i coseni di direzione dell'asse iniziale di rotazione sono proporzionali ad $\frac{l}{b^2+c^2}$, $\frac{m}{c^2+a^2}$ ed $\frac{n}{a^2+b^2}$. Si vegga l'Art. 60.

10. Essendo presa una sezione piana qualunque dell'ellissoide dei momenti di un corpo rispetto ad un punto fisso, il corpo si può far girare intorno all'uno o all'altro dei diametri principali di questa sezione con l'applicazione di una coppia di conveniente grandezza di cui l'asse è l'altro diametro principale.

11. Un corpo che ha un punto O fisso nello spazio si fa girare intorno ad una linea retta proposta qualunque con l'applicazione

della conveniente coppia. La posizione dell'asse di rotazione quando la grandezza della coppia è un massimo, si chiama un asse di massima ripugnanza. Dimostrare che vi sono sei assi di massima ripugnanza, due in ciascun piano principale, entrambi che bisecano gli angoli tra gli assi principali che sono nel loro piano.

12. Se un corpo gira con velocità angolare uniforme ω intorno ad un asse fisso di cui i coseni di direzione relativi agli assi principali in un punto qualunque O della sua lunghezza sono (lmn), allora le intere forze effettive del corpo sono insieme equivalenti ad una forza lineare effettiva $Mr'\omega^2$ in O, e ad una coppia di cui le parti risolute rispetto agli assi sono $-(B-C)mn\omega^2$, $-(C-A)nl\omega^2$ e $-(A-B)lm\omega^2$, dove r' è la distanza del centro di gravità dall'asse.

13. Un corpo in quiete con un punto fisso nello spazio è sollecitato da una coppia impulsiva di cui il momento è G, il piano della quale taglia l'ellissoide dei momenti relativo al punto fisso in una sezione di cui l'area è Γ. Se $M\varkappa^2$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse iniziale di rotazione ed ω è la velocità angolare iniziale, dimostrare che $\frac{G}{\varkappa\omega\Gamma}$ è sempre lo stesso per lo stesso corpo, ed è eguale ad $\frac{1}{\pi\varepsilon^4}\sqrt{\frac{ABC}{M}}$.

14. Un filo senza peso è messo intorno ad una ellisse fissa il di cui piano è verticale, e le due estremità sono legate insieme. La lunghezza del filo è maggiore del contorno dell'ellisse. Un elemento pesante può scorrere liberamente sul filo ed esegue piccole oscillazioni sotto l'azione della gravità. Dimostrare che il pendolo semplice equivalente è il raggio di curvatura dell'ellisse omofocale che passa per la posizione di equilibrio dell'elemento.

CAPITOLO IV.

Moto in due Dimensioni.

64. La posizione di un corpo nello spazio di due dimensioni si può determinare per mezzo delle coordinate del suo centro di gravità, e dell'angolo che una linea retta fissa nel corpo fa con una linea retta fissa nello spazio. Queste tre quantità si chiamano le « coordinate del corpo » ed il nostro oggetto si è di determinarle in termini del tempo.

Il modo in cui ciò si può fare è stato spiegato nel secondo capitolo. Tutto ciò che ora è necessario si è di trovare un'espressione pel momento della quantità di moto

$$h = \Sigma m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right)$$

in termini delle coordinate del corpo. Sia θ la « coordinata angolare » del corpo, cioè l'angolo che una retta fissa nel corpo fa con una retta fissa nello spazio. Siano (r', φ') le coordinate polari di un elemento qualunque m riferito al centro di gravità del corpo come origine. Allora r' è costante durante il moto, e $\frac{d\varphi'}{dt}$ è lo stesso per ogni elemento del corpo ed eguale a $\frac{d\theta}{dt}$. Allora la quantità di moto angolare

$$\begin{aligned} h = \Sigma m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) &= \Sigma m \left(r'^2 \frac{d\varphi'}{dt} \right) \\ &= (\Sigma m\, r'^2) \frac{d\varphi'}{dt} \\ &= Mk^2 \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned}$$

dove Mk^2 è il momento d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di gravità.

Il metodo generale di procedere secondo l'Articolo già citato sarà perciò il seguente.

Siano (x, y) le coordinate del centro di gravità di un corpo qualunque del sistema riferito ad assi rettangolari fissi nello spazio,

M la massa del corpo. Allora le forze effettive del corpo sono insieme equivalenti a due forze misurate da $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$ che agiscono nel centro di gravità parallelamente agli assi delle coordinate, insieme ad una coppia misurata da $Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$ che tende a girare il corpo intorno al suo centro di gravità nella direzione secondo la quale si misura θ. Pel principio di D'Alembert le forze effettive di tutt' i corpi, se si rivolgono in senso contrario, si faranno equilibrio con le forze impresse. Le equazioni dinamiche si possono quindi formare secondo le ordinarie regole della Statica.

Per esempio, se prendiamo i momenti rispetto ad un punto di cui le coordinate sono (p,q) avremo un'equazione della forma

$$M\left\{(x-p)\frac{d^2y}{dt^2}-(y-q)\frac{d^2x}{dt^2}\right\}+Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=L,$$

dove L è il momento delle forze impresse. In questa equazione (p,q) possono essere le coordinate di un punto qualunque, fisso o mobile. Appunto come in un problema statico, la soluzione delle equazioni si può frequentemente semplificare di molto con una conveniente scelta del punto rispetto al quale si prendono i momenti. Così se vogliamo evitare l'introduzione nelle nostre equazioni di qualche reazione ignota, potremo prendere i momenti rispetto al punto di applicazione. Così ancora nel risolvere le nostre forze possiamo rimpiazzare le espressioni Cartesiane $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$ con le forme polari

$$M\left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} \quad \text{ed} \quad M\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

per le parti risolute parallelamente e perpendicolarmente al raggio vettore. Se v è la velocità del centro di gravità, ρ il raggio di curvatura della sua traiettoria, possiamo alle volte usare ancora con vantaggio le forme $\frac{dv}{dt}$ e $\frac{v^2}{\rho}$ per le parti risolute delle forze effettive secondo la tangente ed il raggio di curvatura della traiettoria del centro di gravità.

65. Supponiamo che si formino le equazioni del moto di ciascun corpo risolvendo parallelamente agli assi delle coordinate e prendendo i momenti rispetto al centro di gravità. Otterremo

tre equazioni per ciascun corpo della forma

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= F\cos\varphi + \dots \\ M\frac{d^2y}{dt^2} &= F\,\mathrm{sen}\,\varphi + \dots \\ Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} &= Fp + \dots \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (1),$$

dove F è una qualunque delle forze che agiscono sul corpo, di cui le parti risolute sono $F\cos\varphi$, $F\,\mathrm{sen}\,\varphi$, e di cui il momento rispetto al centro di gravità è Fp. Queste le chiameremo le « Equazioni Dinamiche » del corpo.

Oltre di queste vi saranno alcune equazioni geometriche che esprimono le connessioni del sistema. Siccome ogni tale connessione forzata è accompagnata da una reazione ed ogni reazione da una connessione forzata, il numero delle equazioni geometriche sarà lo stesso del numero delle reazioni ignote nel sistema.

Avendo ottenuto il numero conveniente di equazioni del moto passiamo alla loro soluzione. Due metodi generali sono stati proposti.

Primo Metodo. Si differenziino le equazioni geometriche due volte rispetto a t, e si sostituiscano i valori di $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2\theta}{dt^2}$ dalle equazioni dinamiche. Avremo allora un numero sufficiente di equazioni per determinare le reazioni. Questo metodo sarà di grande vantaggio sempre che le equazioni geometriche sono della forma

$$Ax + By + C\theta = D \dots\dots\dots\dots \quad (2),$$

dove, A, B, C, D sono costanti. Supponiamo ancora che le equazioni dinamiche siano tali che scritte nella forma (1) contengano solamente le reazioni e le costanti nel secondo membro senza x, y o θ. Allora, quando sostituiamo nell'equazione

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0\ ,$$

ottenuta differenziando (2), abbiamo un'equazione che contiene solamente le reazioni e le costanti. Questo essendo vero per tutte le relazioni geometriche, è evidente che tutte le reazioni saranno costanti durante il moto ed i loro valori si possono trovare. Quindi quando questi valori si sostituiscono nelle equazioni dinami-

che (1), i loro secondi membri saranno tutti costanti ed i valori di x, y, e θ si possono trovare con una facile integrazione.

Se però le equazioni geometriche non sono della forma (2), questo metodo di soluzione non potrà ordinariamente applicarsi. Infatti supponiamo che una equazione geometrica prenda la forma

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

contenente i *quadrati* invece delle *prime* potenze, allora la sua seconda equazione differenziale sarà

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0\ ;$$

e sebbene possiamo sostituire per $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$, non possiamo, in generale, eliminare i termini $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ e $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$.

66. *Secondo Metodo*. Supponiamo che il sistema consista di un solo corpo di massa m, e le equazioni del moto siano scritte nella forma

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= AR + \dots \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= BR + \dots \\ mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2} &= CR + \dots \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (2),$$

dove A, B, C sono i coefficienti di una reazione ignota R che può entrare in tutte le equazioni. Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$ e $2\frac{d\theta}{dt}$, e sommando, abbiamo

$$2m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2m\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2mk^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$= 2\left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{d\theta}{dt}\right)R + \dots$$

poi sarà dimostrato in un capitolo seguente che, in virtù delle equazioni geometriche, il coefficiente di R svanirà. E nello stesso modo tutte le altre reazioni ignote spariranno dall'equazione.

Integrando questa equazione otteniamo

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + mk^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \text{una nota funzione di } x,\ y,\ \text{e}\ \theta.$$

Se vi sono due equazioni geometriche saremo al caso di esprimere x od y in termini di θ, e sostituendo avremo

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{una nota funzione di } \theta.$$

Questa equazione risoluta ci abiliterà a determinare x, y, e θ come funzioni di t.

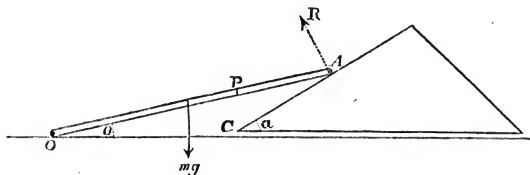
Se vi è solamente un'equazione geometrica vi sarà solamente una reazione ignota nelle primitive equazioni (1). Questa deve essere eliminata dalle equazioni con un procedimento diverso da quello descritto sopra, ed adattato al caso particolare in quistione. È chiaro che non vi possono essere più di due relazioni geometriche indipendenti, poichè allora nessun movimento sarebbe in generale possibile.

Se vi sono più corpi nel Sistema Dinamico proposto, si applicherà lo stesso procedimento. Ciascun gruppo di equazioni deve essere moltiplicato per i fattori sopra descritti e tutti i gruppi debbono essere sommati insieme.

Questo metodo, con poche eccezioni, darà un primo integrale delle equazioni primitive libero dalle reazioni ignote. Se l'intero sistema di corpi è così connesso dalle sue relazioni geometriche che solamente un moto indipendente dell'intero sistema sia possibile, questa equazione sarà sufficiente a determinare quel movimento.

Questo si chiama il metodo della *forza viva*.

67. Es. 1. *Una verga* OA *può girare intorno ad un ganghero in* O, *mentre l'estremo* A *poggia sopra un cuneo levigato che può scorrere lungo un piano orizzontale levigato condotto per* O. *Determinare il moto.*

Sia α = inclinazione del cuneo, M = sua massa ed $x = OC$.

Sia l = lunghezza della verga, m = sua massa e $\theta = AOC$. Sia R la reazione in A. Allora abbiamo

le equazioni dinamiche,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{R\,\mathrm{sen}\,\alpha}{M}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(1),$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{Rl\cdot\cos(\alpha-\theta)-mg\,\frac{l}{2}\cos\theta}{mk^2}\;\ldots\ldots\ldots\;(2),$$

e l' equazione geometrica,

$$x=\frac{l}{\mathrm{sen}\,\alpha}\cdot\mathrm{sen}\,(\alpha-\theta)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(3).$$

È chiaro che dobbiamo applicare il secondo metodo di soluzione. Quindi

$$2M\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+2mk^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgl\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$
$$+2R\left\{\mathrm{sen}\,\alpha\,\frac{dx}{dt}+l\cos(\alpha-\theta)\,\frac{d\theta}{dt}\right\}.$$

Il coefficiente di R si vede che svanisce differenziando l'equazione (3). Integrando abbiamo

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+mk^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=C-mgl\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Sostituendo da (3) abbiamo

$$\left\{M\frac{l^2}{\mathrm{sen}^2\alpha}\cos^2(\alpha-\theta)+mk^2\right\}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=C-mgl\,\mathrm{sen}\,\theta\;\;(4).$$

Se la verga parte dalla quiete quando $\theta=\beta$, allora $C=mgl\,\mathrm{sen}\,\beta$.

Questa equazione non si può integrare ulteriormente. Non possiamo perciò trovare θ in termini di t. Ma la velocità angolare della verga, e quindi la velocità del cuneo, è data dall'equazione suddetta.

68. Es: 2. *Il ciondolo di un pendolo pesante contiene una cavità sferica che è ripiena di acqua. Determinare il movimento.*

Sia O il punto di sospensione, G il centro di gravità della parte solida del pendolo, Mk^2 il suo momento d'inerzia rispetto ad O e sia $OG=h$. Sia C il centro della sfera di acqua, a il suo raggio ed $OC=c$. Sia m la massa dell'acqua.

Se supponiamo che l'acqua sia un fluido perfetto, l'azione tra essa e la cassa deve, per la definizione di un fluido, essere normale al contorno sferico. Non vi sarà quindi alcuna forza che tenda a girare il fluido intorno al suo centro di gravità. Come il

pendolo oscilla qua e là, il centro della sfera parteciperà al suo movimento, ma non vi sarà rotazione dell'acqua.

Per evitare d'introdurre nelle equazioni le reazioni ignote nel punto di sostegno, prenderemo i momenti dell'intero sistema rispetto a questo punto. Sia θ l'angolo che CO, una linea fissa nel corpo, fa con la verticale. Allora, per l'Art. 51, il momento rispetto ad O delle forze effettive sulla parte solida del pendolo è $MK^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Le forze effettive sull'acqua sono equivalenti a $-mc\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ ed $mc\frac{d^2\theta}{dt^2}$ secondo e perpendicolarmente ad OC. Il loro momento rispetto ad O è quindi $mc^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$. La sola forza impressa è la gravità, ed il suo momento rispetto ad O è $(Mh+mc)g\,\text{sen}\,\theta$. L'equazione del moto è quindi

$$(MK^2+mc^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}+(Mh+mc)\,g\,\text{sen}\,\theta=0.$$

La lunghezza L' del pendolo semplice equivalente è, per l'Art. 53,

$$L'=\frac{MK^2+mc^2}{Mh+mc}.$$

Sia mk^2 il momento d'inerzia della sfera di acqua rispetto ad un diametro. Allora se l'acqua divenisse solida e fosse rigidamente connessa con la cassa, la lunghezza L del pendolo semplice equivalente sarebbe, per un simile ragionamento,

$$L=\frac{MK^2+m(c^2+k^2)}{Mh+mc}.$$

Si vede che $L'<L$, sicchè il tempo dell'oscillazione è minore che quando l'intero sistema è solido.

Sulle Forze Impulsive.

69. Nel caso in cui le forze impresse sono impulsive il principio generale enunciato nell'Art. 64 di questo capitolo non richiede che leggiera modificazione.

Siano (u, v), (u', v') le velocità del centro di gravità di un corpo qualunque del sistema risolute parallelamente a due assi rettangolari qualunque immediatamente prima ed immediatamente dopo dell'azione degl'impulsi. Siano ω ed ω' le velocità angolari del corpo intorno al centro di gravità negl'istessi istanti. E sia Mk^2 il momento d'inerzia del corpo rispetto al centro

di gravità. Allora le forze effettive sul corpo sono equivalenti a due forze misurate da $M(u'-u)$ ed $M(v'-v)$ agenti nel centro di gravità parallelamente agli assi delle coordinate insieme ad una coppia misurata da $Mk^2(\omega'-\omega)$.

Le forze effettive risultanti di tutt'i corpi del sistema si possono trovare con la stessa regola. Pel principio di D'Alembert queste si faranno equilibrio con le forze impresse. Le equazioni del moto si possono poi trovare risolvendo in quelle direzioni e prendendo i momenti rispetto a quei punti che si troveranno più convenienti.

In molti casi si troverà che con l'uso delle Velocità Virtuali si può effettuare senza difficoltà l'eliminazione delle reazioni ignote.

70. *Due corpi si urtano scambievolmente, spiegare la natura dell'azione che ha luogo tra essi.*

Quando due sfere di un materiale duro si urtano scambievolmente, esse sembrano separarsi quasi immediatamente, ed un cambiamento finito di velocità si genera in ciascuna per la loro mutua azione. Questo cambiamento istantaneo di velocità è caratteristico di una forza impulsiva. I centri di gravità delle sfere si muovano prima dell'urto nella stessa linea retta con le velocità u e v. Allora dopo dell'urto esse continueranno a muoversi nella stessa linea retta, e siano u', v' le velocità. Siano m, m' le masse delle sfere, R l'azione tra esse, allora abbiamo per l'ultimo Articolo,

$$\left.\begin{aligned} u'-u &= -\frac{R}{m} \\ v'-v &= \frac{R}{m'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}.$$

Queste equazioni non sono sufficienti per determinare le tre quantità u', v', R. Per ottenere una terza equazione dobbiamo considerare ciò che ha luogo durante l'urto.

Ciascuna delle palle sarà leggermente compressa dall'altra, sicchè esse non saranno più sfere perfette. Ciascuna inoltre, in generale, tenderà a riprendere la sua forma primitiva sicchè vi sarà un rimbalzo. Il periodo dell'urto si può quindi dividere in due parti. La prima, il periodo della compressione, quando la distanza tra i centri di gravità dei due corpi va diminuendo, e la seconda, il periodo della restituzione, quando la distanza tra i centri di gravità va crescendo. Al termine di questo secondo periodo i corpi si separano.

La disposizione degli elementi di un corpo essendo disturbata dall'urto, dovremmo determinare i moti relativi delle diverse

parti del corpo. Così dovremmo riguardare ciascun corpo come una collezione di elementi liberi connessi dalle loro mutue azioni. Questi elementi messi in moto continuerebbero sempre nel movimento oscillando intorno ad alcune posizioni medie.

Ordinariamente però si suppone che i cambiamenti di figura e di struttura siano così piccoli che l'effetto nell'alterare la posizione del centro di gravità ed i momenti d'inerzia del corpo si possa trascurare, e che l'intera durata dell'urto sia così breve che il movimento del corpo in quel tempo si possa trascurare. Se per alcuni corpi queste supposizioni non sono vere, gli effetti del loro urto si debbono dedurre dalle equazioni del secondo ordine. Possiamo quindi asserire che nell'istante della massima compressione i centri di gravità dei due corpi si muovono con velocità eguali.

Il rapporto della grandezza dell'azione tra i corpi durante il periodo della restituzione a quella durante la compressione si trova essere diversa per i corpi di differenti materiali. In alcuni casi questo rapporto è così piccolo che la forza durante il periodo della restituzione si può trascurare. I corpi si dicono allora *inelastici*. In questo caso abbiamo immediatamente dopo l'urto

$$u' = v'.$$

Questo dà
$$R = \frac{mm'}{m+m'}(u-v),$$

onde
$$u' = \frac{mu + m'v}{m+m'}.$$

Se la forza di restituzione non si può trascurare, sia R l'intera azione tra le palle, R_0 l'azione sino all'istante della massima compressione. La grandezza di R si deve trovare con l'esperimento. Ciò si può fare determinando i valori di u' e v', e così determinando R per mezzo delle equazioni (1). Questi esperimenti furono fatti per la prima volta da Newton, ed il risultato si è che $\frac{R}{R_0}$ è un *rapporto costante* dipendente dal materiale delle palle. Questo rapporto costante si chiami $1+e$. La quantità e è sempre minore dell'unità, nel caso limite quando $e=1$ i corpi si dicono perfettamente elastici.

Il valore di e essendo supposto conosciuto le velocità dopo dell'urto si possono trovare facilmente. L'azione R_0 si deve prima calcolare come se i corpi fossero inelastici, quindi l'intero

valore di R si può trovare moltiplicando questo risultato per $1+e$. Ciò dà

$$R = \frac{mm'}{m+m'}(u-v)(1+e) ,$$

quindi u' e v' si possono trovare con le equazioni (1).

71. Es. 1. *Un filo è avvolto intorno alla circonferenza di un naspo circolare, e l'estremo libero è legato ad un punto fisso. Il naspo si leva in alto e poi si fa cadere, sicchè nel momento in cui il filo è teso esso è verticale, e tangente al naspo. L'intero movimento essendo supposto aver luogo in un piano, determinare l'effetto dell'impulso.*

Il naspo da principio cade verticalmente senza rotazione. Sia v la velocità del centro nel momento in cui il filo diviene teso; v', ω' la velocità del centro e la velocità angolare immediatamente dopo l'impulso. Sia T la tensione impulsiva, mk^2 il momento d'inerzia del naspo rispetto al suo centro di gravità, a il suo raggio.

Per evitare d'introdurre la tensione ignota nelle equazioni del moto, prendiamo i momenti rispetto al punto di contatto del filo col naspo; allora abbiamo

$$m(v'-v)a + mk^2\omega' = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1).$$

Nell'istante della massima compressione la parte del naspo in contatto col filo non ha alcuna velocità.

Quindi $$v' - a\omega' = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Risolvendo queste abbiamo $\omega' = \dfrac{av}{a^2+k^2}$.

Se il naspo è un cilindro omogeneo $k^2 = \dfrac{a^2}{2}$, ed in questo caso abbiamo

$$\omega' = \frac{2}{3}\frac{v}{a}, \quad v' = \frac{2}{3}v.$$

Se si vuol trovare la tensione impulsiva, abbiamo risolvendo verticalmente

$$m(v'-v) = -T \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3).$$

Quindi $$T = \frac{1}{3}mv,$$

Questi risultati daranno il moto iniziale dopo che il filo è divenuto teso se il filo ed il naspo sono inelastici. Se essi hanno

una elasticità comune e, allora sappiamo che il valore corretto di T è

$$T = \frac{1}{3} mv(1+e).$$

Il movimento di un naspo sollecitato da questa forza impulsiva *conosciuta* si trova facilmente.

Risolvendo verticalmente abbiamo

$$m(v'-v) = -\frac{1}{3} mv(1+e).$$

Prendendo i momenti rispetto al centro di gravità,

$$mk^2 \omega' = \frac{1}{3} mva(1+e),$$

onde v' ed ω' si possono trovare.

Per trovare il movimento susseguente. Il centro del naspo *incomincia* a discendere verticalmente, e non vi è alcuna forza orizzontale su di esso. Quindi esso continuerà a discendere in una linea retta verticale, e durante tutto il moto susseguente il filo è verticale. Il moto si può quindi investigare facilmente. Se poniamo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, e sia F = la tensione finita del filo, si può mostrare che F = un terzo del peso, e che il naspo discende con una accelerazione uniforme $= \frac{2}{3} g$. La velocità iniziale del naspo è stata trovata $= v'$, sicchè lo spazio disceso in un tempo t dopo dell'urto è $= v't + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} gt^2$.

72. Es. 2. *Quattro verghe eguali ciascuna di lunghezza* 2a *e di massa* m *sono congiunte liberamente in modo da formare un rombo. Il sistema cade dalla quiete con una diagonale verticale sotto l'azione della gravità ed urta contro un piano orizzontale fisso inelastico. Trovare il movimento susseguente.*

Siano AB, BC, CD, DE le verghe e sia AC la diagonale verticale che urta sul piano orizzontale in A. Sia V la velocità di ogni punto del rombo immediatamente prima dell'urto e sia α l'angolo che una verga qualunque fa con la verticale.

Siano u, v le velocità orizzontale e verticale del centro di gravità ed ω la velocità angolare di ciascuna delle verghe superiori immediatamente dopo dell'urto. Allora le forze effettive su ciascuna verga sono equivalenti alla forza $m(v-V)$ agente verticalmente ed mu orizzontalmente nel centro di gravità e ad una cop-

pia $mk^2\omega$ che tende ad accrescere l'angolo α. Sia R l'impulso in C, la direzione del quale per la regola della simmetria è orizzontale. Per evitare d'introdurre la reazione in B nelle nostre equazioni, prendiamo i momenti per la verga BC rispetto a B ed abbiamo

$$mk^2\,\omega + m(v-V)\,a\operatorname{sen}\alpha - mua\cos\alpha = -R\cdot 2a\cos\alpha \;\dots\; (1).$$

Ciascuna delle verghe inferiori incomincerà a girare intorno alla sua estremità A come un punto fisso. Se ω' è la sua velocità angolare immediatamente dopo dell'urto, il momento della quantità di moto rispetto ad A immediatamente dopo dell'urto sarà $m(k^2+a^2)\omega'$ ed immediatamente prima sarà $mVa\operatorname{sen}\alpha$. La differenza di questi due è il momento rispetto ad A delle forze effettive su ciascuna delle verghe inferiori. Possiamo ora prendere i momenti rispetto ad A per le due verghe AB,BC insieme ed abbiamo

$$m(k^2+a^2)\omega'-mVa\operatorname{sen}\alpha-mk^2\omega+m(v-V)a\operatorname{sen}\alpha+mu\cdot 3a\cos\alpha$$
$$= R\cdot 4a\cos\alpha \;\dots\dots\dots\dots\; (2).$$

Le equazioni geometriche si possono trovare così.

Poichè le due verghe debbono fare angoli eguali con la verticale durante l'intero moto abbiamo

$$\omega' = \omega \;\dots\dots\dots\dots\; (3).$$

Inoltre, poichè le due verghe sono connesse in B le velocità delle estremità delle due verghe debbono essere le stesse in direzione e grandezza. Risolvendo queste orizzontalmente e verticalmente, abbiamo

$$u + a\,\omega\cos\alpha = 2a\,\omega'\cos\alpha \;\dots\dots\dots\; (4),$$

$$v - a\,\omega\operatorname{sen}\alpha = 2a\,\omega'\operatorname{sen}\alpha \;\dots\dots\dots\; (5).$$

Queste cinque equazioni sono sufficienti per determinare il movimento iniziale.

Eliminando R tra (1) e (2), sostituendo per u,v,ω' in termini di ω dalle equazioni geometriche, troviamo

$$\omega = \frac{3}{2}\cdot\frac{V\operatorname{sen}\alpha}{a(1+3\operatorname{sen}^2\alpha)} \;\dots\dots\dots\; (6).$$

In questo problema avremmo potuto evitare l'introduzione della reazione ignota R con l'uso delle Velocità Virtuali. Supponiamo che si dia al sistema uno spostamento tale che l'inclinazione di ciascuna verga alla verticale si accresca della stessa

quantità $\delta\alpha$. Allora il principio delle Velocità Virtuali dà

$$\left.\begin{array}{l} mk^2\,\omega\delta\alpha - m(v - V)\,\delta\,(3a\cos\alpha) + mu\,\delta\,(a\,\text{sen}\,\alpha) \\ \qquad + m(k^2 + a^2)\,\omega'\,\delta\alpha + mV\delta\,(a\cos\alpha) \end{array}\right\} = 0,$$

che si riduce a

$$(2k^2 + a^2)\omega - Va\,\text{sen}\,\alpha + 3\,(v - V)a\,\text{sen}\,\alpha + ua\cos\alpha = 0,$$

e la soluzione si può continuare come sopra.

Trovare il moto susseguente. Possiamo procedere così. Le forze effettive su ciascuna delle verghe superiori saranno rappresentate dai coefficienti differenziali $m\dfrac{dv}{dt}$, $m\dfrac{du}{dt}$, $mk^2\dfrac{d\omega}{dt}$, ed il momento per ciascuna delle verghe inferiori sarà $m\,(k^2 + a^2)\dfrac{d\omega'}{dt}$.

Sia θ l'angolo che ciascuna verga fa con la verticale al tempo t. Prendendo i momenti nello stesso modo come sopra, abbiamo

$$\begin{aligned} &mk^2\frac{d\omega}{dt} + m\frac{dv}{dt}\,a\,\text{sen}\,\theta - m\frac{du}{dt}\,a\cos\theta \\ &\qquad = - R\cdot 2a\cos\theta + mg\,a\,\text{sen}\,\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &m\,(k^2 + a^2)\frac{d\omega'}{dt} - mk^2\frac{d\omega}{dt} + m\frac{dv}{dt}\,a\,\text{sen}\,\theta + m\frac{du}{dt}\cdot 3\,a\cos\theta \\ &\qquad = R\cdot 4a\cos\theta + mg\,a\,\text{sen}\,\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)'. \end{aligned}$$

Le equazioni geometriche sono le stesse di quelle date sopra, scrivendo θ in vece di α.

Eliminando R e sostituendo per u, v, abbiamo

$$\begin{aligned} &(2k^2 + a^2)\frac{d\omega}{dt} + a^2\left\{9\,\text{sen}\,\theta\frac{d}{dt}(\omega\,\text{sen}\,\theta) + \cos\theta\frac{d}{dt}(\omega\cos\theta)\right\} \\ &\qquad\qquad = 4\,ga\,\text{sen}\,\theta; \end{aligned}$$

moltiplicando i due membri per $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ ed integrando, otteniamo

$$\{\,2\,(k^2 + a^2) + 8a^2\,\text{sen}^2\,\theta\,\}\,\omega^2 = C - 8\,ga\cos\theta.$$

Inizialmente quando $\theta{=}\alpha$, ω ha il valore dato dall'equazione (6). Quindi troviamo che la velocità angolare ω quando l'inclinazione di una verga qualunque alla verticale è θ è data da

$$(1 + 3\,\text{sen}^2\,\theta)\,\omega^2 = \frac{9V^2}{4a^2}\cdot\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{1 + 3\,\text{sen}^2\,\alpha} + \frac{3g}{a}\,(\cos\alpha - \cos\theta).$$

73. *Una lamina libera di forma qualunque gira nel suo proprio piano intorno ad un centro istantaneo di rotazione* S *ed urta in un ostacolo in* P, *situato nella linea retta che congiunge il centro di gravità* G *ad* S. *Trovare il punto* P *quando la grandezza dell' urto è un massimo.*

In primo luogo, l' ostacolo P *sia un punto fisso.*

Sia $GP=x$, e sia R la forza dell' urto. Sia $SG=h$, e siano ω, ω' le velocità angolari intorno al centro di gravità prima e dopo dell' urto. Allora $h\omega$ è la velocità lineare di G immediatamente prima dell' urto; sia v' la sua velocità lineare immediatamente dopo dell' urto.

Abbiamo le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \omega' - \omega &= -\frac{Rx}{Mk^2} \\ v' - h\omega &= -\frac{R}{M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

e supponendo il punto dell' urto ridotto in riposo,

$$v' + x\omega' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Sostituendo per ω' e v' da (1) nell'equazione (2), otteniamo

$$R = M\omega \cdot k^2 \, \frac{x+h}{x^2+k^2}.$$

Questa si deve rendere un massimo. Eguagliando a zero il suo coefficiente differenziale rispetto ad x, otteniamo

$$x^2 + 2hx - k^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3);$$

onde $$x = -h \pm \sqrt{h^2+k^2}.$$

Uno di questi valori di x è positivo e l'altro negativo. Tutti e due corrispondono a punti di percosse massime, ma opposte in direzione. Così vi è un punto P col quale il corpo colpisce di fronte non solamente più potentemente che col centro stesso O di percossa, ma anche più potentemente che con qualunque altro punto; e nello stesso tempo vi è un altro punto P' col quale il corpo colpisce con la massima forza possibile, ma accade così retrocedendo il corpo nella sua propria traslazione nello spazio.

Sia k' il raggio di girazione rispetto all' asse istantaneo di rotazione, allora $h^2+k^2=k'^2$ ed $h+x=SP$; onde $SP=\pm k'$. Quindi i due punti P,P' sono ad eguali distanze da S. Inoltre se O è il centro di oscillazione rispetto ad S come centro di sospensione, $SG\cdot SO=k'^2$; onde $SP^2=SG\cdot SO$.

Poichè GP, GP' sono le radici dell'equazione quadratica (3), sarà

$$\left.\begin{array}{l} GP' - GP = 2h \\ GP \cdot GP' = k^2 \end{array}\right\}.$$

L'ultima equazione mostra che se P si fa punto di sospensione, P' è il corrispondente centro di oscillazione. È facile vedere che PP' è divisa armonicamente in G ed O.

In secondo luogo, sia l'ostacolo un elemento libero di massa m.

Allora, oltre delle equazioni (1), abbiamo l'equazione del moto dell'elemento m. Sia V' la sua velocità dopo dell'urto, onde

$$V' = \frac{R}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Il punto dell'urto nei due corpi avrà dopo dell'urto la stessa velocità, quindi invece dell'equazione (2) abbiamo

$$V' = v' + x\omega' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Sostituendo per ω', v', V' dalle equazioni (1) e (4) nell'equazione (5), otteniamo

$$R = M\omega \cdot k^2 \frac{m(x+h)}{(M+m)k^2 + mx^2}.$$

Questa si deve rendere un massimo. Eguagliando a zero il suo coefficiente differenziale rispetto ad x, otteniamo

$$x^2 + 2hx = k^2\left(1 + \frac{M}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6);$$

onde
$$x = -h \pm \sqrt{h^2 + k^2\left(1 + \frac{M}{m}\right)}.$$

Questo punto non coincide con quello trovato quando l'ostacolo era fisso, a meno che non sia m infinito. Per trovare quando esso coincide col centro di oscillazione, dobbiamo porre $k^2 = xh$. Questo dà $\frac{M}{m} = \frac{x+h}{h}$, o se $l = x + h$ è la lunghezza del pendolo semplice equivalente, $\frac{M}{m} = \frac{l}{h}$.

Poichè $V' = \frac{R}{m}$, è evidente che quando R è un massimo V' è un massimo. Quindi i due punti trovati con l'equazione (6) si potrebbero chiamare i centri di massima velocità comunicata.

Vi sono altri punti singolari in un corpo in movimento le di cui posizioni si possono trovare; così potremmo ricercare in qual punto un corpo deve urtare contro un ostacolo *fisso*, affinchè *in primo luogo* la velocità lineare del centro di gravità sia un massimo, o *in secondo luogo,* affinchè la velocità angolare sia un massimo. Questi punti, rispettivamente, sono stati chiamati da Poinsot i centri di massima Riflessione e Conversione. Riferendoci alle equazioni (1), vediamo che quando v' è un massimo R è o un massimo o un minimo, e quindi si può mostrare che il primo punto coincide col punto di massimo urto. Quando ω' è un massimo, dobbiamo rendere

$$\omega - \frac{Rx}{Mk^2} = massimo.$$

Sostituendo per R, questa dà

$$x^2 - 2\frac{k^2}{h}x - k^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Se O è il centro di oscillazione, abbiamo $GO = \frac{k^2}{h}$. Sia questa lunghezza rappresentata da h. Allora l'equazione (7) diviene

$$x^2 - 2h'x - k^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Le radici di questa equazione sono le stesse funzioni di h' e k che quelle dell'equazione (3) sono di h e k, eccetto che i segni sono opposti. Ora S ed O sono in parti opposte di G, quindi le posizioni dei due centri di massima Conversione serbano ad O e G la stessa relazione che le posizioni dei due centri di massima Riflessione serbano ad S e G. Se il punto di sospensione si cambia da S in O, le posizioni dei centri di massima Riflessione e Conversione si scambiano tra loro.

Sul Moto Relativo o sugli Assi Mobili.

74. In molti problemi dinamici il moto relativo dei diversi corpi del sistema è spesso tutto ciò che si chiede. In questi casi sarà vantaggioso di poter determinare ciò senza trovare il moto assoluto di ciascun corpo nello spazio. Supponiamo che si voglia il moto relativo ad un corpo (A). Vi sono due casi da considerare (1) quando il corpo (A) ha solamente un moto di traslazione, e (2) quando esso ha solamente un moto di rotazione. Il caso in cui il corpo (A) ha un moto sì di traslazione che di rotazione si può riguardare come una combinazione di questi due casi. Consideriamoli in ordine.

75. Si voglia trovare il moto di un sistema dinamico qualunque relativo ad un punto C in movimento. Possiamo evidentemente ridurre C in quiete applicando ad ogni elemento del sistema un'accelerazione eguale ed opposta a quella di C. Sarà ancora necessario di supporre che una velocità *iniziale* eguale ed opposta a quella di C sia stata applicata a ciascun elemento.

Sia f l'accelerazione di C ad un tempo qualunque t. Se ogni elemento m di un corpo è sollecitato dalla stessa forza acceleratrice f parallela ad una direzione data qualunque, è chiaro che queste sono insieme equivalenti ad una forza $f\Sigma m$ che agisce nel centro di gravità. Quindi per ridurre un punto qualunque C di un sistema in quiete, sarà sufficiente di applicare al centro di gravità di ciascun corpo in una direzione opposta a quella dell'accelerazione di C una forza misurata da Mf, dove M è la massa del corpo ed f l'accelerazione di C.

Il punto C si può ora prendere come origine delle coordinate. Possiamo ancora prendere i momenti rispetto ad esso come se fosse un punto fisso nello spazio.

Consideriamo l'equazione dei momenti un poco più minutamente. Siano (r, θ) le coordinate polari di un elemento qualunque di un corpo di massa m riferito a C come origine. Le accelerazioni dell'elemento sono

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{ed} \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right),$$

secondo e perpendicolarmente al raggio vettore r. Prendendo i momenti rispetto a C, otteniamo

$$\Sigma m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{momento rispetto a } C \text{ delle forze impresse più} \\ \text{il momento intorno a } C \text{ delle forze effettive di} \\ C \text{ rivolte in senso contrario supposte agire nel} \\ \text{centro di gravità.}\end{array}\right.$$

Se il punto C è fisso nel corpo e si muove con esso, $\frac{d\theta}{dt}$ sarà lo stesso per ogni elemento del corpo, e, come nell'Art. 51, abbiamo

$$\Sigma m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

76. Dall'equazione generale dei momenti rispetto ad un punto in movimento apprendiamo che possiamo usare l'equazione

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\text{momento delle forze rispetto a } C}{\text{momento d'inerzia rispetto a } C}$$

nei seguenti casi.

Primo. Se il punto C è fisso sì nel corpo che nello spazio; poichè allora l'accelerazione di C è nulla.

• *Secondo.* Se il punto C essendo fisso nel corpo si muove nello spazio con velocità uniforme; per la stessa ragione come sopra.

Terzo. Se il punto C è il centro di gravità, infatti in questo caso, benchè l'accelerazione di C non sia zero, pure il momento svanisce.

Quarto. Se il punto C è il centro istantaneo di rotazione (*), ed il moto è una piccola oscillazione. Al tempo t il corpo gira intorno a C, e la velocità di C è quindi zero. Al tempo $t+dt$, il corpo gira intorno ad un punto C' molto vicino a C. Sia $CC'=d\sigma$, allora la velocità di C è $\omega d\sigma$. Quindi nel tempo dt la velocità di C è cresciuta da zero ad $\omega d\sigma$, perciò la sua accelerazione è $\omega\frac{d\sigma}{dt}$. Per ottenere l'equazione accurata dei momenti rispetto a C dobbiamo applicare la forza effettiva $\Sigma m\cdot\omega\frac{d\sigma}{dt}$ in direzione opposta nel centro di gravità. Ma nelle piccole oscillazioni ω e $\frac{d\sigma}{dt}$ sono entrambe piccole quantità i di cui quadrati e prodotti si debbono trascurare. Quindi il momento di questa forza deve essere trascurato, e l'equazione del moto sarà la stessa come se C fosse stato un punto fisso.

Si deve osservare che possiamo prendere i momenti rispetto ad un punto qualunque molto vicino al centro istantaneo di rotazione, ma ordinariamente sarà più conveniente di prendere i momenti rispetto al centro nella sua posizione disturbata. Se vi sono reazioni ignote al centro di rotazione, i loro momenti saranno allora zero.

Se si vuole l'equazione accurata dei momenti rispetto al centro istantaneo, il valore di $\omega\frac{d\sigma}{dt}$ si deve trovare dalle circostanze particolari del problema che si considera. Per esempio, se un corpo rotola sopra una curva, allora l'arco $d\sigma$ è descritto da C quando il corpo ha girato per un angolo $\frac{d\sigma}{\rho}+\frac{d\sigma}{\rho'}$, dove ρ,ρ' sono i raggi di curvatura del corpo e della curva nel punto di con-

(*) Se un corpo è in moto in un piano si sa che l'attuale spostamento di ogni elemento nel tempo dt è lo stesso come se il corpo avesse girato per un angolo ωdt intorno ad un punto fisso C. Questo si può dimostrare nello stesso modo della proposizione corrispondente in Tre Dimensioni del Capitolo seguente.

tatto, le curvature essendo supposte in direzioni opposte. Quindi, poichè ωdt è l'angolo girato dal corpo nel tempo dt,

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\omega}{\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}}.$$

77. Esempio. *Due elementi pesanti di masse* m *ed* m' *sono connessi da un filo inestensibile, che passa sul vertice di un doppio piano inclinato di massa* M, *il quale è capace di muoversi liberamente sopra un piano orizzontale fisso. Trovare la forza che deve agire sul cuneo affinchè il sistema sia in uno stato di equilibrio relativo.*

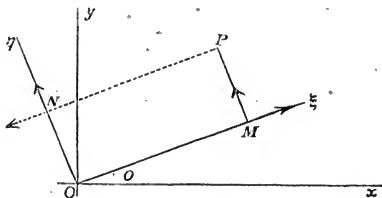
Qui sarà conveniente di ridurre il cuneo in quiete applicando ad ogni elemento un'accelerazione f eguale ed opposta a quella del cuneo. Supponendo fatto ciò l'intero sistema è in equilibrio. Se F è la forza richiesta, abbiamo risolvendo orizzontalmente $(M+m+m')f=F$.

Siano α, α' le inclinazioni dei lati del cuneo all'orizzontale. L'elemento m è sollecitato da mg verticalmente ed mf orizzontalmente. Quindi la tensione del filo è $m(g\,\mathrm{sen}\,\alpha+f\cos\alpha)$. Considerando l'elemento m', troviamo che la tensione è ancora $m'(g\,\mathrm{sen}\,\alpha'-f\cos\alpha')$. Eguagliando queste due abbiamo

$$f=\frac{m'\,\mathrm{sen}\,\alpha'-m\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m'\cos\alpha'+m\cos\alpha}\,g.$$

Quindi F è determinato.

78. In seguito, consideriamo il caso in cui si vuol riferire il movimento a due linee rette $O\xi, O\eta$ che girano intorno ad un'origine fissa O con velocità angolare ω.

Siano Ox, Oy assi fissi qualunque e sia l'angolo $xO\xi=\theta$. Siano $\xi=OM$, $\eta=PM$ le coordinate di un punto qualunque P.

È chiaro che il movimento di P è composto dai movimenti dei due punti M,N per semplice addizione. Le parti risolute della

velocità di M sono $\frac{d\xi}{dt}$ e $\xi\omega$ secondo e perpendicolarmente ad OM. Le parti risolute della velocità di N sono nello stesso modo $\frac{d\eta}{dt}$ ed $\eta\omega$ secondo e perpendicolarmente ad ON. Addizionando queste con i loro convenevoli segni abbiamo

$$\left.\begin{array}{l}\text{velocità di } P\\ \text{parallela ad } O\xi\end{array}\right\} = \frac{d\xi}{dt} - \eta\omega,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{velocità di } P\\ \text{parallela ad } O\eta\end{array}\right\} = \frac{d\eta}{dt} + \xi\omega.$$

Nello stesso modo addizionando le accelerazioni di M ed N abbiamo

$$\left.\begin{array}{l}\text{accelerazione di } P\\ \text{parallela ad } O\xi\end{array}\right\} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\omega^2 - \frac{1}{\eta}\frac{d}{dt}(\eta^2\omega),$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{accelerazione di } P\\ \text{parallela ad } O\eta\end{array}\right\} = \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\omega^2 + \frac{1}{\xi}\frac{d}{dt}(\xi^2\omega).$$

Usando queste formole invece di $\frac{d^2x}{dt^2}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$ possiamo riferire il movimento agli assi mobili $O\xi$, $O\eta$.

In modo simile possiamo usare le coordinate polari. In questo caso se (r, φ) sono le coordinate polari di P, abbiamo

$$\left.\begin{array}{l}\text{accelerazione di } P\\ \text{secondo il rag. vet.}\end{array}\right\} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt} + \omega\right)^2,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{accelerazione di } P\\ \text{perp. al rag. vet.}\end{array}\right\} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left\{r^2\left(\frac{d\varphi}{dt} + \omega\right)\right\}.$$

79. Esempio. *Un elemento sotto l'azione di forze qualunque si muove su di una curva levigata che è costrétta a girare con velocità angolare ω intorno ad un asse fisso. Trovare il moto relativo alla curva.*

Supponiamo che il moto sia in tre dimensioni. Si prenda l'asse delle Z per l'asse fisso, e siano gli assi delle ξ, η fissi relativamente alla curva. Allora le equazioni del moto sono,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\omega^2 - \dfrac{1}{\eta}\dfrac{d}{dt}(\eta^2\omega) = X + Rl\\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\omega^2 + \dfrac{1}{\xi}\dfrac{d}{dt}(\xi^2\omega) = Y + Rm\\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + Rn\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(1),$$

dove X, Y, Z sono le parti risolute delle forze acceleratrici impresse risolute parallelamente agli assi, R è la pressione sulla curva, ed (l, m, n) sono i coseni di direzione della direzione di R. Allora poichè R agisce perpendicolarmente alla curva

$$l\frac{d\xi}{ds} + m\frac{d\eta}{ds} + n\frac{d\zeta}{ds} = 0.$$

Supponiamo che la curva mobile si proietti ortogonalmente sul piano delle ξ, η, sia σ l'arco della proiezione, e $v' = \frac{d\sigma}{dt}$ la parte risoluta della velocità parallela al piano di proiezione. Allora le equazioni si possono scrivere nella forma

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + \omega^2\xi + \frac{d\omega}{dt}\eta + 2\omega v'\frac{d\eta}{d\sigma} + Rl,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + \omega^2\eta - \frac{d\omega}{dt}\xi - 2\omega v'\frac{d\xi}{d\sigma} + Rm,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Rn.$$

I due termini $2\omega v'\frac{d\eta}{d\sigma}$ e $-2\omega v'\frac{d\xi}{d\sigma}$ si possono riguardare come le parti risolute di una forza $2\omega v'$ che agisce in una direzione i di cui coseni di direzione sono

$$l' = \frac{d\eta}{d\sigma},\ m' = -\frac{d\xi}{d\sigma},\ n' = 0.$$

Questi soddisfano all'equazione

$$l'\frac{d\xi}{ds} + m'\frac{d\eta}{ds} + n'\frac{d\zeta}{ds} = 0.$$

Quindi la forza è perpendicolare alla tangente della curva, ed anche perpendicolare all'asse di rotazione. Sia R' la risultante della reazione R e della forza $2\omega v'$. Allora R' agisce anche perpendicolarmente alla tangente, siano (l'', m'', n'') i coseni di direzione della sua direzione.

Le equazioni del moto diventano quindi

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= X + \omega^2\xi + \frac{d\omega}{dt}\eta + R'l'' \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y + \omega^2\eta - \frac{d\omega}{dt}\xi + R'm'' \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + R'n''.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Queste sono le equazioni del moto di un elemento che si muove su di una *curva fissa*, e sollecitato in aggiunta delle forze impresse da due forze estranee, cioè (1) una forza $\omega^2 r$ che tende direttamente dall'asse, dove r è la distanza dell'elemento dall'asse, e (2) una forza $\frac{d\omega}{dt} r$ perpendicolare al piano che contiene l'elemento e l'asse, in senso opposto alla direzione della rotazione della curva.

In ogni problema particolare possiamo perciò trattare la curva come fissa. Così supponiamo che la curva giri intorno all'asse con uniforme velocità angolare.

Allora risolvendo secondo la tangente abbiamo

$$v \frac{dv}{ds} = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} + \omega^2 r \frac{dr}{ds},$$

dove r è la distanza dell'elemento dall'asse. Sia V il valore iniziale di v, r_0 quello di r. Allora

$$v^2 - V^2 = 2\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

Sia v_0 la velocità che l'elemento avrebbe avuto sotto l'azione delle stesse forze se la curva fosse stata fissa. Allora

$$v_0^2 - V^2 = 2\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Quindi
$$v^2 - v_0^2 = \omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

La pressione sulla curva mobile non è eguale alla pressione sulla curva fissa. La pressione R sulla curva mobile è chiaramente la risultante della pressione R' sulla curva fissa, e di una pressione $2\omega v$ che agisce perpendicolarmente alla curva ed all'asse nella direzione del moto della curva.

Così supponiamo che la curva sia piana e giri uniformemente intorno ad un asse perpendicolare al suo piano, e che non vi siano forze impresse. Abbiamo, risolvendo secondo la normale,

$$\frac{v^2}{\rho} = -\omega^2 r \operatorname{sen}\varphi + R',$$

dove φ è l'angolo che r fa con la tangente.

Se p è la perpendicolare condotta dall'asse sulla tangente, abbiamo, perciò,

$$R = \frac{v^2}{\rho} + \omega^2 p + 2\omega v.$$

Se ω è variabile, abbiamo in simil modo

$$R = \frac{v^2}{\rho} + \omega^2 p + 2\omega v + \frac{d\omega}{dt}\sqrt{r^2 - p^2}.$$

ESEMPII.

1. Una sfera levigata è posta su di un piano orizzontale, ed un' altra sfera che poggia su di essa è disturbata dalla sua posizione di equilibrio instabile. Le due sfere essendo omogenee, dimostrare che qualunque siano i loro raggi o i pesi, la sfera superiore lascerà l'inferiore prima che l'angolo formato dalla verticale con la congiungente dei centri diventi eguale a $\cos^{-1}\frac{2}{3}$.

2. Una trave rota su di un piano orizzontale levigato intorno ad un estremo, che è fisso, sotto l'azione di nessuna forza eccetto la resistenza dell'atmosfera. Supponendo che l'effetto ritardatore della resistenza su di un piccolo elemento della trave di lunghezza α sia $A\alpha(\text{veloc.})^2$, allora la velocità angolare al tempo t è data da

$$\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\Omega}=\frac{Aa^4}{4Mk^2}t.$$

3. Un filo metallico circolare pesante ha il suo piano verticale ed il suo punto più basso ad un' altezza h al di sopra di un piano orizzontale. Un piccolo anello si proietta lungo il filo metallico dal suo punto più alto con una velocità angolare intorno al suo centro eguale a $\pi n\sqrt{\frac{2g}{h}}$ nell'istante in cui il filo si lascia cadere. Mostrare che quando il filo raggiunge il piano orizzontale, l'elemento avrà descritto precisamente n rivoluzioni.

4. Due verghe uniformi eguali di lunghezza $2a$, congiunte con un ganghero in una estremità, sono situate simmetricamente su di una sfera fissa levigata di raggio $\frac{a\sqrt{2}}{3}$, e sollevate in una posizione orizzontale sicchè il ganghero sia a contatto con la sfera. Se esse si lasciano discendere sotto l'azione della gravità, mostrare che, quando sono in quiete, esse s'inclinano sotto un angolo $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ all'orizzonte, che i punti di contatto con la sfera sono i centri di oscillazione delle verghe relativamente al ganghero, che la pressione sulla sfera in ciascun punto di contatto eguaglia un quarto del peso di ciascuna verga, e che non si esercita alcuno sforzo sul ganghero.

5. Due verghe rettilinee eguali ed uniformi sono connesse nei loro estremi da due corde della stessa lunghezza a, in modo da

formare un parallelogrammo. Una verga è sostenuta nel suo centro da un asse fisso intorno al quale può girare liberamente, quest' asse essendo perpendicolare al piano del movimento che è verticale. Mostrare che il punto medio della verga inferiore oscillerà come un pendolo semplice di lunghezza a, e che il movimento *angolare* delle verghe è indipendente da questa oscillazione.

6. Una corda sottile è legata ai due punti A, B nello stesso piano orizzontale, e porta un peso W nel suo punto medio. Una verga di cui la lunghezza è AB ed il peso W, ha un anello su ciascun estremo, attraverso del quale passa la corda, e si lascia cadere dalla posizione AB. Mostrare che la fune deve essere almeno $\frac{5}{3} AB$, affinchè il peso possa mai raggiungere la verga.

Inoltre se il sistema è in equilibrio, ed il peso si sposta leggermente secondo la verticale, il tempo delle sue piccole oscillazioni è $2\pi\sqrt{\frac{AB}{3g\sqrt{3}}}$.

7. Un filo sottile è racchiuso in un tubo circolare levigato che gira liberamente intorno ad un diametro verticale; dimostrare che, nella posizione di equilibrio relativo, l'inclinazione (θ) alla verticale, del diametro che passa pel centro di gravità del filo, sarà data dall' equazione

$$\cos\theta = \frac{g}{a\omega^2 \cos\beta},$$

dove ω è la velocità angolare del tubo, a il suo raggio, e $2a\beta$ la lunghezza del filo. Spiegare il caso in cui il valore di $a\omega^2 \cos\beta$ è compreso tra g e $-g$.

8. Un filo metallico levigato senza inerzia è piegato in forma di un' elica che è capace di girare intorno ad un asse verticale coincidente con una linea generatrice del cilindro sul quale essa è tracciata. Un piccolo anello pesante scende lungo l' elica, partendo da un punto in cui quest' asse verticale incontra l' elica: dimostrare che la velocità angolare dell' elica sarà un massimo quando essa ha girato per un angolo θ dato dall' equazione

$$\cos^2\theta + \tan^2\alpha + \theta \operatorname{sen}2\theta = 0,$$

α essendo l' inclinazione dell' elica all' orizzonte.

9. Una cavità sferica di raggio a è praticata in un cubo di vetro di massa M, ed un elemento di massa m è posto nell' interno. Il cubo è poi messo in moto su di un piano orizzontale levigato in

modo che l'elemento va intorno alla sfera, rimanendo in contatto con essa. Se la velocità di proiezione è V, dimostrare che

$$V^2 = 5ag + 4ag\frac{m}{M}.$$

10. Tre verghe eguali situate in una linea retta sono congiunte tra loro con gangheri, e si muovono con una velocità v perpendicolare alle loro lunghezze; se il punto medio della verga di mezzo diviene subitaneamente fisso, mostrare che le estremità delle altre due s'incontreranno in un tempo $\frac{4\pi a}{9v}$, a essendo la lunghezza di ciascuna verga.

11. AB, BC sono due verghe uniformi eguali congiunte a cerniera in B, le quali si muovono con la stessa velocità in una direzione perpendicolare alla loro lunghezza; se l'estremo A si fissa subitaneamente, mostrare che la velocità angolare iniziale di AB è tre volte quella di BC. Inoltre mostrare che nel moto susseguente delle verghe il massimo angolo tra esse eguaglia $\cos^{-1}\frac{2}{3}$, e che quando sono poi in una linea retta, la velocità angolare di BC è nove volte quella di AB.

12. Tre travi pesanti, uniformi ed eguali, congiunte insieme sono collocate nella stessa linea retta su di una tavola levigata, ed un dato impulso orizzontale è applicato al punto medio della trave di mezzo in una direzione perpendicolare alla sua lunghezza; mostrare che l'impulso istantaneo su ciascuna delle altre travi è un sesto del dato impulso.

13. Tre travi della stessa sostanza, congiunte insieme in modo da formare una trave, sono collocate su di una tavola orizzontale levigata. Le due travi estreme sono eguali in lunghezza, ed una di esse riceve un urto nella sua estremità libera in una direzione perpendicolare alla sua lunghezza. Determinare la lunghezza della trave di mezzo affinchè si comunichi alla terza la massima possibile velocità angolare.

Risultato. La lunghezza della trave di mezzo deve stare a ciascuna delle altre travi come $\sqrt{3}:2$.

14. Una verga mobile in un piano verticale intorno ad un ganghero nel suo estremo superiore ha una data verga uniforme congiunta al suo estremo inferiore da un ganghero intorno al quale essa può girare liberamente nello stesso piano verticale come la verga superiore; in qual punto la verga inferiore deve essere col-

pita orizzontalmente in quello stesso piano verticale affinchè la verga superiore non risenta inizialmente l'effetto dell'urto?

15. Una trave uniforme è bilanciata intorno ad un asse orizzontale che passa pel suo centro di gravità, ed una palla perfettamente elastica si fa cadere da un'altezza h sopra un estremo; determinare il movimento della trave e della palla.

Risultato. Siano M, m le masse della trave e della palla, $2a=$ lunghezza della trave, V, V' le velocità della palla negl'istanti prima e dopo dell'urto, ω' la velocità angolare della trave. Allora

$$\omega' = \frac{6mV}{(M+3m)a}, \quad V' = V \cdot \frac{3m-M}{3m+M}.$$

16. Una lamina libera di forma qualunque gira nel suo proprio piano intorno ad un centro istantaneo di rotazione S ed urta in un ostacolo fisso, P, situato nella linea retta che congiunge il centro di gravità G ed S. Trovare la posizione di P, *primo*, affinchè il centro di gravità si riduca in quiete, *in secondo luogo* affinchè la sua velocità dopo dell'urto sia la stessa come prima dell'urto ma in direzione opposta.

Risultato. Nel primo caso, P coincide o con G o col centro di oscillazione. Nel secondo caso i punti $x = GP$ si trovano dall'equazione

$$x^2 - \frac{k^2}{2h}x + \frac{k^2}{2} = 0, \quad \text{dove} \quad SG = h.$$

17. Un quadrato si muove liberamente intorno ad una diagonale con la velocità angolare ω, quando uno dei vertici non in quella diagonale diviene fisso; determinare la pressione impulsiva sul punto fisso, e mostrare che la velocità angolare istantanea sarà $\frac{\omega}{7}$.

18. I punti $ABCD$ sono i vertici di un quadrato; AB, CD sono due verghe simili eguali connesse dalla corda BC, eguale in lunghezza a ciascuna di esse. Il punto A riceve un impulso nella direzione AD, mostrare che la velocità iniziale di A è sette volte quella del punto D.

19. Un rombo è formato di quattro verghe rigide uniformi, ciascuna di lunghezza $2a$, congiunte liberamente alle loro estremità. Se il rombo è collocato sopra una tavola orizzontale levigata e si dà un urto ad angoli retti ad una qualunque delle verghe, il rombo incomincerà a muoversi come un corpo rigido se

l'urto è applicato ad un punto lontano per $a(1-\cos\alpha)$ da un angolo acuto, dove α è l'angolo acuto.

20. Un rettangolo è formato da quattro verghe uniformi di lunghezze $2a$ e $2b$ rispettivamente, le quali sono connesse da gangheri nei loro estremi. Il rettangolo gira intorno al suo centro sopra un piano orizzontale levigato con una velocità angolare n, quando un punto in uno dei lati di lunghezza $2a$ diviene subitaneamente fisso. Mostrare che la velocità angolare dei lati di lunghezza $2b$ diviene immediatamente $\frac{3a+b}{6a+4b}n$. Trovare inoltre il cambiamento nella velocità angolare degli altri lati e l'azione impulsiva nel punto che diviene fisso.

21. Delle travi eguali AB, BC, CD... sono connesse da gangheri, le travi sono situate sopra un piano orizzontale levigato, ciascuna ad angoli retti sulle due adiacenti, in modo da formare una figura somigliante ad una serie di scalini, e si dà un impulso all'estremo A secondo AB. Se X_n è l'azione impulsiva nell'n^{mo} vertice, mostrare che

$$X_{2n+1}-5X_{2n+2}-2X_{2n+3}=0, \quad \text{ed} \quad X_{2n+2}-5X_{2n+1}-2X_{2n}=0.$$

Quindi trovare X_n.

22. Tre verghe eguali uniformi ed inelastiche congiunte insieme a cerniera sono situate in linea retta sopra una tavola orizzontale levigata, e le due estreme sono messe in moto intorno agli estremi della media con velocità angolari eguali (1) nella stessa direzione e (2) in direzioni opposte. Dimostrare che nel primo caso, quando le verghe estreme fanno il massimo angolo con la direzione della media prolungata da ciascuna parte la velocità angolare comune delle tre è $\frac{4\omega}{7}$, e nel secondo caso dopo l'urto delle due verghe estreme il triangolo formato da esse si muoverà con velocità uniforme $\frac{2a\omega}{3}$, $2a$ essendo la lunghezza di ciascuna verga.

23. Due corde di lunghezze eguali hanno un'estremità legata ad un peso C e le loro altre estremità legate a due punti A, B nella stessa orizzontale. Se si taglia una la tensione dell'altra si altera istantaneamente nel rapporto $1:2\cos^2\frac{C}{2}$.

24. Due verghe eguali AC, BC, sono liberamente connesse in C, ed uncinate in A e B, due punti nella stessa linea orizzontale

ciascuna verga essendo allora inclinata sotto un angolo α all' orizzonte. Togliendo subitaneamente l'uncino B, dimostrare che la direzione dello sforzo in C si sposta istantaneamente per un angolo

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+6\,\text{sen}^2\alpha}{1+6\cos^2\alpha}\cdot\frac{2-3\cos^2\alpha}{3\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}\right).$$

25. Una lamina ellittica è sostenuta col suo piano verticale e l'asse maggiore orizzontale da due caviglie senza peso che passano per i fuochi. Togliendo un perno mostrare che se l'eccentricità dell'ellisse è $\sqrt{\frac{2}{5}}$, la pressione sull'altro perno non sarà inizialmente alterata.

26. Tre elementi eguali A, B, C che si respingono scambievolmente con forze qualunque, sono legati insieme per mezzo di tre funi di lunghezze disuguali, in modo da formare un triangolo rettangolo in A. Se si taglia la fune che congiunge B e C, dimostrare che i cambiamenti istantanei di tensione delle funi che congiungono BA, CA sono $\frac{1}{2}T\cos B$ ed $\frac{1}{2}T\cos C$ rispettivamente, dove B e C sono gli angoli opposti alle funi che congiungono CA, AB rispettivamente.

27. Due elementi (m, m') sono congiunti da un filo che passa per un piccolo anello fisso e sono tenuti in modo che il filo sia orizzontale; le loro distanze dall'anello essendo a ed a', si lasciano andare. Se ρ, ρ' sono i raggi iniziali di curvatura delle loro traiettorie, dimostrare che

$$\frac{m}{\rho}=\frac{m'}{\rho'},\quad \text{ed}\quad \frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}.$$

28. Un triangolo equilatero è sospeso da un punto per mezzo di tre funi, ciascuna eguale ad uno dei lati, attaccate ai suoi vertici; se si taglia una fune, mostrare che le tensioni delle altre due si diminuiscono nel rapporto di 36 : 43.

29. Una verga orizzontale di massa m e lunghezza $2a$, pende per mezzo di due funi parallele di lunghezza $2a$ attaccate ai suoi estremi: una velocità angolare ω essendo subitaneamente comunicata ad essa intorno ad un asse verticale che passa pel suo centro, mostrare che l'accrescimento iniziale di tensione di ciascuna fune eguaglia $\frac{ma\omega^2}{4}$, e che la verga salirà per uno spazio $\frac{a^2\omega^2}{6g}$.

30. Un solido uniforme, nella figura di un paraboloide di rotazione, poggia col suo vertice sopra un piano orizzontale levigato. Esso è diviso simmetricamente da un piano verticale. Spiegare perchè la pressione sul piano diminuisce istantaneamente; trovare il cambiamento di pressione.

31. Un anello circolare è fisso in una posizione verticale sopra un piano orizzontale levigato, ed un piccolo anello è messo sul circolo, ed attaccato al punto più alto per mezzo di un filo che sottende un angolo α al centro; dimostrare che se si taglia il filo e si lascia libero il circolo, le pressioni sull'anello prima e dopo che si taglia il filo sono nel rapporto $M+m \operatorname{sen}^2 \alpha : M \cos\alpha$, m ed M essendo le masse dell'anello e del circolo.

32. Due verghe eguali uniformi, ciascuna di massa m, sono situate in forma della lettera X sopra un piano orizzontale levigato, le estremità superiori ed inferiori essendo connesse da funi eguali; mostrare che qualunque fune si tagli, la tensione dell'altra è la stessa funzione dell'inclinazione delle verghe, ed inizialmente è $\frac{3}{8} mg \operatorname{sen}\alpha$, dove α è l'inclinazione iniziale delle verghe.

33. Un'estremità C di una verga si fa girare con velocità angolare uniforme n nella circonferenza di un circolo di raggio a, mentre la verga stessa si fa girare in senso opposto con la stessa velocità angolare intorno a quella estremità. La verga inizialmente coincide con un diametro, ed un anello levigato capace di scorrere liberamente lungo la verga è posto nel centro del circolo. Se r è la distanza dell'anello da C al tempo t, dimostrare che

$$r = \frac{2a}{5}(e^{nt} + e^{-nt}) + \frac{a}{5}\cos 2nt.$$

CAPITOLO V.

Moto di un Corpo rigido in tre dimensioni.

Geometria del Movimento di un Corpo rigido.

80. Se gli elementi di un corpo sono connessi rigidamente tra loro, allora qualunque sia la natura del movimento generato dalle forze, vi debbono essere alcune relazioni generali tra i movimenti degli elementi del corpo. Queste debbono essere tali che conosciuto il movimento di tre punti non in linea retta, se ne possa dedurre quello di ogni altro punto. Sarà quindi nostro scopo in primo luogo di considerare il carattere generale del movimento di un corpo rigido indipendentemente dalle forze che lo producono, e di ridurre la determinazione del movimento di ogni elemento al minore numero possibile di quantità indipendenti: ed in secondo luogo considereremo in qual modo quando le forze sono date queste quantità indipendenti si possano trovare.

81. *Un punto di un corpo rigido in movimento essendo fisso, si cerca di dedurre le relazioni generali tra i movimenti degli altri punti del corpo.*

Sia O il punto fisso e si prenda come centro di una sfera mobile che supporremo fissa nel corpo. Il raggio vettore di un punto qualunque Q del corpo tagli la sfera in P, allora il movimento di ogni punto Q del corpo sarà rappresentato da quello di P.

Se gli spostamenti di due punti A, B, sulla sfera nel piccolo

tempo dt sono dati da AA', BB', allora chiaramente lo sposta-

mento di ogni altro punto P sulla sfera si può trovare costruendo sopra $A'B'$ come base un triangolo $A'P'B'$ simile ed eguale ad APB. Allora PP' rappresenterà lo spostamento di P. Si può assumere come evidente, o si può dimostrare come in Euclide, che sulla stessa base e dalla medesima parte di essa non vi possono essere due triangoli sulla stessa sfera, i quali abbiano i loro lati che terminano in un'estremità della base eguali tra loro, e similmente quelli che terminano nell'altra estremità.

Siano D ed E i punti medii degli archi AA', BB', e siano DC, EC gli archi di circoli massimi perpendicolari ad AA', BB' rispettivamente. Allora chiaramente $CA=CA'$ e $CB=CB'$, e quindi poichè le basi AB, $A'B'$ sono eguali, i due triangoli ACB, $A'C'B'$ sono eguali e simili. Quindi lo spostamento di C è zero.

Inoltre è evidente poichè gli spostamenti di O e C sono zero che lo spostamento di ogni punto nella linea retta OC è anche zero.

Quindi se un corpo è in movimento in un modo qualunque intorno ad un punto fisso O, *vi è ad ogni istante una linea retta* OC *tale che lo spostamento di ogni suo punto nel tempo* dt *è zero.*

Poichè ogni punto in OC è in quiete, possiamo supporre che questa linea retta sia fissa nello spazio. Il corpo quindi può essere portato da una posizione qualunque AB in un'altra $A'B'$ per mezzo di una rotazione intorno ad OC come asse per un angolo PCP' tale che un punto qualunque P sia portato in coincidenza con la sua nuova posizione P'. Allora ogni punto del corpo sarà portato dalla sua prima alla sua seconda posizione. Si chiami quest'angolo $d\theta$.

82. Def. L'ultimo rapporto di quest'angolo $d\theta$ al tempo dt si chiama la velocità angolare del corpo intorno ad OC, e la linea retta OC si chiama l'asse istantaneo al tempo t.

La velocità angolare si può anche definire essere l'angolo pel quale il corpo girerebbe in una unità di tempo se continuasse a girare durante quella unità con la stessa velocità angolare che avea nell'istante proposto, ed intorno allo stesso asse.

83. *Spiegare ciò che s'intende per un corpo che ha velocità angolari intorno a più assi nello stesso tempo.*

Un corpo in movimento si dice di avere una velocità angolare ω intorno ad una linea retta, quando, girando il corpo intorno a questa linea retta per un angolo ωdt, ogni punto del corpo è portato dalla sua posizione al tempo t alla sua posizione al tempo $t+dt$.

Supponiamo che durante tre intervalli successivi ciascuno di

tempo dt, il corpo giri successivamente intorno a tre linee rette diverse OA, OB, OC che s'incontrano in un punto O per gli angoli $\omega_1 dt$, $\omega_2 dt$, $\omega_3 dt$. Allora dimostreremo prima che la posizione finale è la stessa in qualunque ordine si effettuino queste rotazioni. Sia P un punto qualunque nel corpo, e siano le sue distanze da OA, OB, OC, rispettivamente r_1, r_2, r_3. Giri prima il corpo intorno ad OA, allora P riceve uno spostamento $\omega_1 r_1 dt$. Per questo movimento r_2 diventi $r_2 + dr_2$, allora lo spostamento cagionato dalla rotazione intorno ad OB sarà in grandezza $\omega_2(r_2 + dr_2)dt$. Ma secondo i principî del Calcolo Differenziale possiamo nel limite trascurare le quantità del secondo ordine, e lo spostamento diviene $\omega_2 r_2 dt$. Così ancora lo spostamento dovuto alla rimanente rotazione sarà $\omega_3 r_3 dt$. E questi tre risultati saranno gli stessi in qualunque ordine le rotazioni abbiano luogo. In modo simile possiamo dimostrare che le *direzioni* di questi spostamenti saranno indipendenti dall'ordine. Lo spostamento finale è la diagonale del parallelepipedo descritto su queste tre linee come lati, ed è perciò indipendente dall'ordine delle rotazioni. Essendo dunque le tre rotazioni del tutto indipendenti, si può dire che esse hanno luogo simultaneamente.

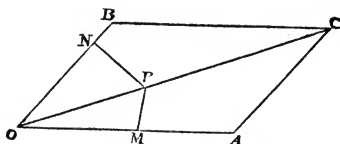
Quando si dice che un corpo ha velocità angolari intorno a tre assi diversi s'intende solamente che il movimento si può determinare come segue. Si divida l'intero tempo in piccoli intervalli ciascuno eguale a dt. Durante ciascuno di questi, giri il corpo intorno ai tre assi successivamente, per gli angoli $\omega_1 dt$, $\omega_2 dt$, $\omega_3 dt$. Allora quando dt diminuisce senza limite il moto durante l'intero tempo sarà accuratamente rappresentato.

84. *Se due velocità angolari intorno a due assi* OA, OB *sono rappresentate in grandezza e direzione dalle due lunghezze* OA, OB; *allora la diagonale* OC *del parallelogrammo costruito sopra* OA, OB *come lati sarà l'asse risultante di rotazione, e la sua lunghezza rappresenterà la grandezza della velocità angolare risultante.* Questa Proposizione si chiama comunemente « Il parallelogrammo delle velocità angolari. »

Sia P un punto qualunque in OC, e siano PM, PN perpendicolari ad OA, OB. Poichè OA rappresenta la velocità angolare intorno ad OA e PM è la distanza di P da OA, il prodotto $OA \cdot PM$ rappresenterà la velocità di P dovuta alla velocità angolare intorno ad OA. Similmente $OB \cdot PN$ rappresenterà la velocità di P dovuta alla velocità angolare intorno ad OB. Siccome P è a sinistra di OA ed a dritta di OB, se guardiamo rispettivamente secondo queste direzioni, è evidente che queste velocità sono in direzioni opposte.

Quindi la velocità di un punto qualunque P è rappresentata da

$$\begin{aligned} & OA \cdot PM - OB \cdot PN \\ & = OP \{ OA \cdot \operatorname{sen} COA - OB \cdot \operatorname{sen} COB \} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Quindi il punto P è in quiete ed OC è l'asse risultante di rotazione.

Sia ω la velocità angolare intorno ad OC, allora la velocità di un punto qualunque A in OA è perpendicolare al piano AOB ed è rappresentata da $\omega \cdot$ distanza di A da $OC = \omega \cdot OA \operatorname{sen} COA$. Ma poichè il movimento è anche determinato dalle due velocità angolari intorno ad OA, OB, il movimento del punto A è anche rappresentato da $OB \cdot$ distanza di A da $OB = OB \cdot OA \operatorname{sen} BOA$; quindi

$$\omega = OB \cdot \frac{\operatorname{sen} BOA}{\operatorname{sen} COA} = OC.$$

Quindi la velocità angolare intorno ad OC è rappresentata in grandezza da OC.

Da questa proposizione possiamo dedurre come corollario « il parallelogrammo delle accelerazioni angolari ». Infatti, se OA, OB rappresentano le velocità angolari addizionali impresse su di un corpo in un istante qualunque, ne segue che la diagonale OC rappresenterà la velocità angolare addizionale risultante in direzione e grandezza.

85. Questa proposizione mostra che le velocità angolari e le accelerazioni angolari si possono comporre e risolvere con le stesse regole e nello stesso modo come se fossero forze. Così una velocità angolare ω intorno ad un asse dato qualunque si può risolvere in due, $\omega \cos \alpha$ ed $\omega \operatorname{sen} \alpha$, intorno ad assi ad angoli retti tra loro e che formano gli angoli α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ con l'asse dato.

Se un corpo ha le velocità angolari ω_1, ω_2, ω_3 intorno a tre

assi Ox, Oy, Oz ad angoli retti, esse sono insieme equivalenti ad una sola velocità angolare ω, dove $\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}$, intorno ad un asse che fa con gli assi dati gli angoli i di cui coseni sono rispettivamente $\frac{\omega_1}{\omega}$, $\frac{\omega_2}{\omega}$, $\frac{\omega_3}{\omega}$. Questo si può dimostrare, come nella proposizione corrispondente nella Statica componendo le tre velocità angolari, prendendole due alla volta.

Però sarà inutile di ricapitolare le diverse proposizioni dimostrate per le forze nella Statica riferendole alle velocità angolari. Possiamo usare « il triangolo delle velocità angolari » o le regole per comporre insieme più velocità angolari, senza ulteriore dimostrazione.

86. *Un corpo ha le velocità angolari* ω, ω' *intorno a due assi paralleli* OA, O'B *alla distanza* a *tra loro, trovare il movimento risultante.*

Poichè le linee rette parallele si possono considerare come il limite di due linee rette che s'intersegano ad una distanza molto grande, segue dal parallelogrammo delle velocità angolari che le due date velocità angolari sono equivalenti ad una velocità angolare intorno ad un asse parallelo $O''C$ situato nel piano che contiene OA, $O'B$.

Sia x la distanza di questo asse da OA, e supponiamo che esso sia con OB dalla stessa parte di OA. Sia Ω la velocità angolare intorno ad esso.

Si consideri un punto qualunque P, alla distanza y da OA e situato nel piano dei tre assi. La velocità di P dovuta alla rotazione intorno ad OA è ωy, la velocità dovuta alla rotazione intorno ad $O'B$ è $\omega'(y-a)$. Ma queste due insieme debbono essere equivalenti alla velocità dovuta alla velocità angolare risultante Ω intorno ad $O''C$, e questa è $\Omega(y-x)$, quindi

$$\omega y+\omega'(y-a)=\Omega(y-x).$$

Questa equazione è vera per tutt'i valori di y, onde

$$\left.\begin{aligned}\Omega&=\omega+\omega'\\ x&=\frac{a\omega'}{\Omega}\end{aligned}\right\}.$$

Questo è lo stesso risultato che si sarebbe ottenuto se avessimo cercato la risultante di due *forze* ω, ω' agenti secondo OA, OB.

Se $\omega = -\omega'$, la velocità angolare risultante svanisce, ma x è infinita. La velocità di un punto qualunque P è in questo caso

$$\omega y + \omega'(y - a) = a\omega,$$

la quale è indipendente dalla posizione di P.

Il risultato si è che due velocità angolari, ciascuna eguale ad ω ma tendenti a girare il corpo in direzioni opposte intorno a due assi paralleli ad una distanza a tra loro, sono equivalenti ad una *velocità lineare* rappresentata da $a\omega$. Ciò corrisponde alla proposizione nella Statica che « una coppia » è propriamente misurata dal suo momento.

Possiamo dedurre come corollario, che un moto di rotazione ω intorno ad un asse OA è equivalente ad un eguale movimento di rotazione intorno ad un asse parallelo $O'B$ più un movimento di traslazione $a\omega$ perpendicolare al piano che contiene $OA, O'B$, e nella direzione nella quale si muove $O'B$.

87. *Ogni movimento di un corpo rigido si può rappresentare con una combinazione dei due moti seguenti.*

1.° *Un moto di traslazione, in cui ogni elemento si muove parallelamente alla direzione del movimento di un punto assegnato qualunque connesso rigidamente col corpo, e con la stessa velocità.*

2.° *Un moto di rotazione dell'intero corpo intorno ad un asse condotto per questo punto assegnato.*

È evidente che il cambiamento di posizione del corpo si può effettuare *primo,* movendo un punto qualunque O dalla sua antica alla sua nuova posizione con un moto di traslazione, ed *in secondo luogo*, ritenendo questo punto O fisso, movendo due punti qualunque del corpo non in linea retta con O sino alle loro nuove posizioni. Quest'ultimo movimento è stato dimostrato essere equivalente ad una rotazione intorno ad un solo asse condotto per O.

Siano ω_1, ω_2, ω_3 le parti risolute della velocità angolare rispetto a tre assi rettangolari qualunque che s' incontrano in O; u, v, w le velocità lineari di O parallele a questi assi. Allora queste sei quantità determinano lo stato di movimento del corpo nell'istante che si considera. È chiaro che possiamo scegliere un punto qualunque del corpo pel punto O, sicchè il movimento si può rappresentare in moltissime maniere. Le relazioni che esistono tra queste si possono dedurre dalle proposizioni corrispondenti della Statica.

88. *Spiegare una certa analogia che esiste tra la Statica e la Dinamica.*

Tutte le proposizioni della Statica relative alla composizione ed alla risoluzione delle forze e delle coppie sono fondate su questi teoremi:

1. Il parallelogrammo delle forze ed il parallelogrammo delle coppie.

2. Una forza F è equivalente ad una forza qualunque eguale e parallela insieme ad una coppia Fp, dove p è la distanza tra le forze.

Corrispondenti a questi abbiamo in Dinamica i teoremi seguenti sul movimento di un corpo rigido:

1. Il parallelogrammo delle velocità angolari ed il parallelogrammo delle velocità lineari.

2. Una velocità angolare ω è equivalente ad una velocità angolare eguale intorno ad un asse parallelo insieme con una velocità lineare eguale ad ωp, dove p è la distanza tra gli assi paralleli.

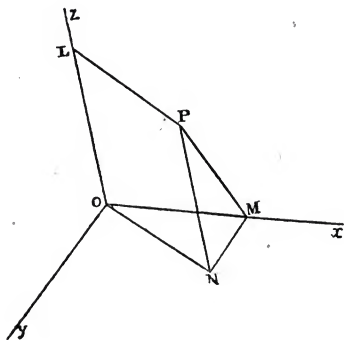
Ne segue che ogni proposizione nella Statica relativa alle forze ha una proposizione corrispondente nella Dinamica relativa al movimento di un corpo rigido, e queste due si possono dimostrare nello stesso modo.

È dimostrato nella Statica che un sistema di forze e di coppie è generalmente equivalente ad una sola forza e ad una sola coppia, e che queste si possono ridurre ad una risultante K agente secondo una linea chiamata l'asse centrale, e ad una coppia G rispetto a quell'asse. O pure esse si possono ridurre anche ad una risultante R della stessa grandezza di prima, agente secondo una linea qualunque parallela all'asse centrale alla distanza c da esso arbitrariamente scelta, insieme con una coppia G' rispetto ad un asse perpendicolare alla linea la di cui lunghezza è c, ed inclinato alla risultante R sotto un angolo θ. Allora sappiamo che $G' = \sqrt{G^2+R^2c^2}$, ed è un minimo quando $c=0$, ed inoltre che $\tan\theta = \frac{Rc}{G}$.

Lo stesso modo di ragionamento col quale furono stabiliti questi risultati, stabilirà la proposizione seguente. Il moto generale di un corpo essendo stato ridotto ad un moto di traslazione e ad uno di rotazione, questi sono equivalenti ad un moto di rotazione ω intorno ad una linea chiamata l'asse centrale, e ad una traslazione V secondo quell'asse. O pure essi si possono anche ridurre ad una rotazione ω della stessa grandezza di prima intorno ad una linea parallela all'asse centrale, e ad una distanza c da esso scelta ad arbitrio, insieme con una traslazione V' se-

condo una linea perpendicolare alla linea c, ed inclinata all'asse di ω sotto un angolo θ. Allora sappiamo che $V' = \sqrt{V^2 + c^2\omega^2}$, ed è un minimo quando $c = 0$, ed inoltre che $\tan\theta = \frac{c\omega}{V}$.

In modo simile si possono stabilire varie altre proposizioni.

89. *Date le velocità angolari* ω_1, ω_2, ω_3 *di un corpo intorno a tre assi* Ox, Oy, Oz *ad angoli retti, determinare le velocità attuali di un elemento di cui le coordinate sono* x, y, z.

Queste velocità angolari si suppongono positive quando esse tendono a girare intorno agli assi come le coppie positive tendono nella Statica. Così le direzioni positive di $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sono rispettivamente da y a z, da z ad x, e da x ad y.

Determiniamo la velocità di P parallela all' asse delle z. Sia PN l'ordinata z, e si conduca PM perpendicolare ad Ox. La velocità di P dovuta alla rotazione intorno ad Ox è chiaramente $\omega_1 PM$. Risolvendo questa secondo NP otteniamo

$$\omega_1 PM \operatorname{sen} NPM = \omega_1 y.$$

Similmente quella dovuta alla rotazione intorno ad Oy è $-\omega_2 x$; e quella dovuta alla rotazione intorno ad Oz è 0. Quindi l'intera velocità di P parallela ad Oz è

$$\frac{dz}{dt} = \omega_1 y - \omega_2 x,$$

90. Le equazioni dell'ultimo articolo ci abiliteranno a dedurre senza difficoltà i risultati dell'Art. 88. Supponiamo che il movimento sia dato, come sopra, per mezzo delle velocità lineari (u, v, w) di un punto O e delle velocità angolari $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Lo stesso movimento sia rappresentato ancora per mezzo delle velocità lineari u', v', w' parallele agli assi, di un altro punto O' e delle velocità angolari $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ intorno ad assi paralleli agli assi coordinati e che s'incontrano in O'. Siano (ξ, η, ζ) le coordinate di O'. Abbiamo ora due rappresentazioni dello stesso movimento, tutte e due queste debbono dare lo stesso risultato per le velocità lineari di un punto qualunque. Quindi

$$\left.\begin{aligned} u + \omega_2 z - \omega_3 y &= u' + \omega_2'(z - \zeta) - \omega_3'(y - \eta) \\ v + \omega_3 x - \omega_1 z &= v' + \omega_3'(x - \xi) - \omega_1'(z - \zeta) \\ w + \omega_1 y - \omega_2 x &= w' + \omega_1'(y - \eta) - \omega_2'(x - \xi) \end{aligned}\right\} \dots (1),$$

debbono essere vere per tutt'i valori di x, y, z.

Ciò dà $\omega_1'=\omega_1$, $\omega_2'=\omega_2$, $\omega_3'=\omega_3$, sicchè qualunque origine si scelga, la velocità angolare è sempre la stessa in direzione e grandezza.

Inoltre (ξ, η, ζ) si possono scegliere in modo che la velocità di O' sia secondo l'asse di rotazione; in questo caso abbiamo (u', v', w') proporzionali ad $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. L'equazione del luogo di O' è perciò

$$\frac{u + \omega_2\zeta - \omega_3\eta}{\omega_1} = \frac{v + \omega_3\xi - \omega_1\zeta}{\omega_2} = \frac{w + \omega_1\eta - \omega_2\xi}{\omega_3} \dots (2).$$

Moltiplicando il numeratore ed il denominatore di ciascuna di queste frazioni per $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ rispettivamente, e sommandoli insieme, vediamo che ciascuna di esse è

$$= \frac{u\omega_1 + v\omega_2 + w\omega_3}{\omega^2}.$$

Il movimento del corpo è così rappresentato da un moto di traslazione seconda la linea retta di cui le equazioni sono (2) e da una velocità angolare eguale ad ω intorno ad essa. Questa linea retta si chiama l'asse centrale.

Se il movimento è tale che $u\omega_1 + v\omega_2 + w\omega_3 = 0$, ed $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ non svaniscono tutte, ciascuna delle quantità eguali in (2) è zero, e quindi per l'equazione (1) $u'=0$, $v'=0$, $w'=0$. Il movimento è perciò equivalente ad una rotazione intorno all'asse centrale, senza traslazione. Questo è anche evidente per l'analogia spiegata nell'Art. 88.

91. *Determinare le equazioni generali del movimento di un corpo intorno ad un punto fisso.*

Il punto fisso O si prenda per origine, e siano x, y, z le coordinate al tempo t di un elemento qualunque m riferito ad assi rettangolari qualunque fissi nello spazio. Siano Xm, Ym, Zm le forze impresse agenti su questo elemento, e siano L, M, N i momenti di tutte queste forze rispetto agli assi delle coordinate, e P, Q, R le pressioni del punto fisso sul corpo.

Allora pel Principio di D'Alembert, se le forze effettive $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$ si applicano ad ogni elemento m in direzione opposta, vi sarà equilibrio tra queste forze e le forze impresse. Prendendo quindi i momenti rispetto agli assi, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= L \\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= M \\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= N \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}.$$

Risolvendo parallelamente agli assi, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} &= P + \Sigma mX \\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} &= Q + \Sigma mY \\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} &= R + \Sigma mZ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}.$$

Per semplificare queste equazioni, siano ω_x, ω_y, ω_z le velocità angolari intorno agli assi. Allora

$$\frac{dx}{dt} = \omega_y z - \omega_z y\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega_z x - \omega_x z\,,$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega_x y - \omega_y x\,;$$

onde

$$\frac{d^2x}{dt^2} = z\frac{d\omega_y}{dt} - y\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d\omega_z}{dt} - z\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z(\omega_y z - \omega_z y) - \omega_x(\omega_x y - \omega_y x).$$

Sostituendo nell' ultima delle equazioni (1) otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m(x^2+y^2)\dfrac{d\omega_z}{dt} - \Sigma myz\cdot\dfrac{d\omega_y}{dt} - \Sigma mxz\cdot\dfrac{d\omega_x}{dt} \\ -\Sigma mxy\cdot(\omega_x^2-\omega_y^2) + \Sigma m(x^2-y^2)\,\omega_x\omega_y - \Sigma myz\cdot\omega_x\omega_z \\ \qquad + \Sigma mxy\cdot\omega_y\omega_z \end{array}\right\} = N.$$

Le altre due equazioni si possono trattare nello stesso modo.

Le equazioni primitive (I) non si possono usare poichè esse contengono un numero infinito di accelerazioni ignote. Con questa trasformazione esse sono state ridotte tutte a dipendere da tre quantità ignote, cioè ω_x, ω_y, ω_z. Ma le equazioni così ottenute sono così complicate da essere praticamente inutili. Per semplificarle ulteriormente si prendano gli assi OA, OB, OC, fissi nel corpo, e coincidenti con gli assi principali del corpo nel punto O, e siano ω_1, ω_2, ω_3 le velocità angolari intorno a questi assi.

Siccome gli assi Ox, Oy, Oz sono interamente arbitrarii, si prendano in modo che gli assi OA, OB, OC passino per essi nell' istante che si considera. Allora $\omega_x=\omega_1$, $\omega_y=\omega_2$, $\omega_z=\omega_3$, e l' ultima equazione si riduce a

$$\Sigma m(x^2+y^2)\frac{d\omega_z}{dt} + \Sigma m(x^2-y^2)\,\omega_1\omega_2 = N.$$

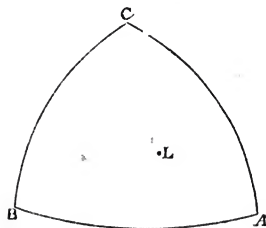
Dobbiamo ora trovare la relazione tra $\dfrac{d\omega_z}{dt}$ e $\dfrac{d\omega_3}{dt}$. Siano A, B, C i punti in cui gli assi principali intersegano una sfera che ha per centro il punto fisso. Sia OL un altro asse qualunque, e sia Ω la velocità angolare intorno ad esso. Gli angoli LOA, LOB, LOC si chiamino rispettivamente α, β, γ. Allora per l' Art. 85

$$\Omega = \omega_1\cos\alpha + \omega_2\cos\beta + \omega_3\cos\gamma;$$

onde

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}\cos\alpha + \frac{d\omega_2}{dt}\cos\beta + \frac{d\omega_3}{dt}\cos\gamma$$
$$- \omega_1\,\text{sen}\,\alpha\frac{d\alpha}{dt} - \omega_2\,\text{sen}\,\beta\frac{d\beta}{dt} - \omega_3\,\text{sen}\,\gamma\frac{d\gamma}{dt}.$$

Ora la linea OL sia fissa nello spazio e coincida con OC nell'i-

stante che si considera. Allora $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$; quindi

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1 \frac{d\alpha}{dt} - \omega_2 \frac{d\beta}{dt}.$$

Inoltre $\frac{d\alpha}{dt}$ è la ragione secondo la quale A si separa da un punto *fisso* in C, la quale è chiaramente ω_2. Similmente $\frac{d\beta}{dt} = -\omega_1$. Quindi

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}.$$

Così $$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}, \quad \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt}, \quad \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}.$$

L'equazione $\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}$ può sembrare a primo aspetto evidente da per sè stessa, ma non è così; ω_3 dinota la velocità angolare del corpo intorno all'asse OC *fisso nel corpo*, ω_z dinota la velocità angolare intorno ad una linea Oz *fissa nello spazio*, e determinata dalla condizione che *al tempo* t, OC coincide con essa. Al tempo $t+\delta t$, OC si sarà separata da Oz, e non possiamo quindi asserire *a priori* che la velocità angolare intorno ad OC continuerà ad essere la stessa di quella intorno ad Oz. L'investigazione precedente dimostra che accade così finchè si considerano le piccole quantità di primo ordine.

Sostituendo per $\frac{d\omega_z}{dt}$ l'equazione del moto diviene

$$\Sigma m\,(x^2 + y^2)\,\frac{d\omega_3}{dt} + \Sigma m\,(x^2 - y^2)\,\omega_1\omega_2 = N.$$

Siano A, B, C i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi principali in O; allora le tre equazioni del moto sono

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - (B - C)\,\omega_2\omega_3 = L \\ B\frac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\,\omega_3\omega_1 = M \\ C\frac{d\omega_3}{dt} - (A - B)\,\omega_1\omega_2 = N \end{aligned}\right\} \text{......... (III.}$$

Queste si chiamano le Equazioni di Eulero.

92. *Determinare la pressione sul punto fisso.*

Se x', y', z' sono le coordinate del centro di gravità, le equazioni (II) si riducono alla forma

$$M\frac{d^2x'}{dt^2} = P + \Sigma mX,$$

e due simili equazioni. È necessario di esprimere $\frac{d^2x'}{dt^2}$ l'accelerazione secondo una linea retta fissa in termini di ω_x, ω_y, ω_z. Questo è stato già fatto, ed abbiamo

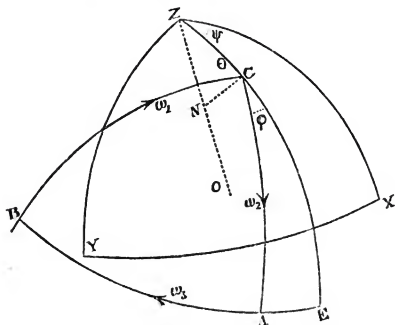
$$M\left\{z'\frac{d\omega_y}{dt} - y'\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_y(\omega_x y' - \omega_y x') - \omega_z(\omega_z x' - \omega_x z')\right\} = P + \Sigma mX,$$

e due simili equazioni.

93. *Determinare le equazioni geometriche che connettono il movimento del corpo nello spazio con le velocità angolari del corpo intorno ai tre assi mobili,* OA, OB, OC.

Si prenda il punto fisso O come centro di una sfera di raggio l'unità; siano X, Y, Z, A, B, C i punti in cui la sfera è incontrata dagli assi fissi e mobili rispettivamente. ZC, BA prolungati se occorre, s'incontrino in E. Sia l'angolo $XZC = \psi$, $ZC = \theta$, $ECA = \varphi$. Si cerca di determinare le relazioni geometriche fra θ, φ, ψ, ed ω_1, ω_2, ω_3.

Si tiri CN perpendicolare ad OZ. Allora poichè ψ è l'angolo che il piano COZ fa con un piano XOZ fisso nello spazio, la velocità di C perpendicolare al piano ZOC è $CN\frac{d\psi}{dt}$, che equivale a $\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\psi}{dt}$, il raggio OC della sfera essendo l'unità. Inoltre la

velocità di C secondo ZC è $\frac{d\theta}{dt}$. Così il movimento di C è rappresentato da $\frac{d\theta}{dt}$ e $\operatorname{sen}\theta\frac{d\psi}{dt}$ rispettivamente secondo e perpendicolarmente a ZC. Ma il movimento di C è anche rappresentato

dalle velocità angolari ω_1 ed ω_2 rispettivamente secondo BC e CA. Queste due rappresentazioni dello stesso movimento debbono perciò essere equivalenti. Quindi risolvendo secondo e perpendicolarmente a ZC abbiamo.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 \operatorname{sen}\varphi + \omega_2 \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\frac{d\psi}{dt} &= -\omega_1\cos\varphi + \omega_2\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (IV).$$

Similmente risolvendo secondo CB e CA abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\varphi - \frac{d\psi}{dt}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \omega_2 &= \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (IV').$$

Queste equazioni sono precisamente equivalenti a (IV) e si possono dedurre da esse con una trasformazione algebrica.

Nello stesso modo tirando la perpendicolare da E sopra OZ possiamo mostrare che la velocità di E perpendicolare a ZE è $\frac{d\psi}{dt}\operatorname{sen} ZE$, che equivale a $\frac{d\psi}{dt}\cos\theta$. Inoltre la velocità di A re-

lativa ad E secondo EA è nello stesso modo $\frac{d\varphi}{dt}$ sen CA, che equivale a $\frac{d\varphi}{dt}$. Quindi l'intera velocità di A nello spazio secondo AB è rappresentata da $\frac{d\psi}{dt}\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}$. Ma questo movimento è anche rappresentato da ω_3. Come sopra queste due rappresentazioni dello stesso movimento debbono essere equivalenti. Quindi abbiamo

$$\omega_3=\frac{d\psi}{dt}\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}.$$

Se in un modo simile avessimo espresso il movimento di un altro punto qualunque del corpo come B, in termini di $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e di θ, φ, ψ, avremmo ottenuto altre equazioni. Ma siccome non possiamo avere più di tre relazioni indipendenti, arriveremmo solamente ad equazioni che sono trasformazioni algebriche di quelle già ottenute.

Sugli Assi Mobili.

94. In molti casi si troverà conveniente di riferire il movimento del corpo che si considera ad assi che si muovono nello spazio in un dato modo intorno ad un'origine fissa. Se riferiamo il movimento di questi assi ad altri assi fissi nello spazio avremo l'inconveniente di due sistemi di assi. Per questa ragione il loro movimento ad ogni istante è alle volte definito per mezzo delle velocità angolari (θ_1, θ_2, θ_3) intorno a loro stessi. Dobbiamo considerare gli assi come se fossero un sistema materiale di tre linee rette ad angoli retti il di cui movimento ad ogni istante è dato da tre velocità angolari coesistenti intorno ad assi che coincidono istantaneamente con essi.

Quando gli assi si muovono possiamo supporre che il movimento del corpo sia determinato dalle tre velocità angolari ω_1, ω_2, ω_3 intorno agli assi, nello stesso modo come se gli assi fossero fissi per un istante nello spazio. La posizione del corpo al tempo $t+dt$ si può costruire da quella al tempo t girando il corpo per gli angoli $\omega_1 dt$, $\omega_2 dt$, $\omega_3 dt$ successivamente intorno alla posizione istantanea degli assi. Ma bisogna rammentarsi che $\omega_3 dt$ non dà ora l'angolo pel quale il corpo ha girato relativamente al piano xz, ma relativamente ad un piano fisso nello spazio che passa per la posizione istantanea dell'asse delle z. L'angolo percorso relativamente al piano xz è $(\omega_3-\theta_3)dt$.

95. *Trovare le parti risolute della velocità di un elemento qualunque parallele agli assi mobili.*

Le parti risolute della velocità di un punto qualunque di cui le coordinate sono (x, y, z) non sono date da $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Queste sono le velocità risolute dell'elemento *relativamente* agli assi. Per trovare il movimento nello spazio dobbiamo aggiungere a queste le velocità risolute dovute al movimento degli assi stessi. Se supponessimo l'elemento connesso rigidamente con gli assi, è chiaro che le sue velocità sarebbero espresse dalle formole date nell'Art. 89 sostituendo $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ per $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Sicchè le attuali velocità risolute dell'elemento sono

$$u = \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2\,,$$

$$v = \frac{dy}{dt} - z\theta_1 + x\theta_3\,,$$

$$w = \frac{dz}{dt} - x\theta_2 + y\theta_1\,.$$

96. *Per trovare le accelerazioni di un elemento qualunque parallele agli assi possiamo procedere così.*

Le velocità dell'elemento al tempo t risolute parallelamente agli assi Ox, Oy, Oz sono rispettivamente (u, v, w). Al tempo $t+dt$, gli assi sono passati nelle posizioni Ox', Oy', Oz' per mezzo delle rotazioni eguali a $\theta_1 dt$, $\theta_2 dt$, $\theta_3 dt$ intorno agli assi Ox, Oy, Oz rispettivamente, e le velocità dell'elemento parallele agli assi nella loro nuova posizione sono

$$u + \frac{du}{dt}dt,\ \ v + \frac{dv}{dt}dt,\ \ w + \frac{dw}{dt}dt.$$

Per trovare l'accelerazione parallela all'asse delle z dobbiamo risolvere tutte queste in quella direzione. Con la rotazione intorno l'asse delle y, l'asse delle x' si è allontanato dall'asse delle z per un angolo $\theta_2 dt$, e con la rotazione intorno l'asse delle x l'asse delle y' si è avvicinato all'asse delle z per un angolo $\theta_1 dt$. Inoltre l'asse delle z' fa con l'asse delle z un angolo il di cui coseno si può prendere come unità. Quindi la parte risoluta della velocità dell'elemento al tempo $t+dt$ secondo l'asse delle z è ultimamente

$$w + \frac{dw}{dt}dt - u\theta_2 dt + v\theta_1 dt.$$

Ma l'accelerazione è per definizione, il rapporto della velocità

acquistata in un tempo qualunque dt a quel tempo. Quindi se Z è l'accelerazione risoluta parallelamente all'asse delle z, abbiamo

$$Z = \frac{dw}{dt} - u\theta_2 + v\theta_1.$$

Similmente se X ed Y sono le accelerazioni parallele agli assi delle x e delle y, abbiamo

$$X = \frac{dw}{dt} - v\theta_3 + w\theta_2 ,$$

$$Y = \frac{dv}{dt} - w\theta_1 + u\theta_3.$$

97. *Esprimere le condizioni geometriche affinchè una linea retta, di cui le equazioni rispetto agli assi mobili sono date, sia fissa in direzione nello spazio.*

Siano le equazioni della linea retta data

$$\frac{x-f}{p} = \frac{y-g}{q} = \frac{z-h}{r},$$

e siano le equazioni preparate in modo che (p, q, r) siano i coseni di direzione della linea. Si tiri una retta per l'origine parallela a questa linea retta data e si prenda su di essa un punto P ad una data distanza L dall'origine O. Allora le coordinate di P sono pL, qL, rL rispettivamente. Poichè la linea retta OL è fissa in direzione nello spazio, le parti risolute della velocità di P parallele agli assi sono zero. Quindi abbiamo

$$\frac{dLp}{dt} - Lq\theta_3 + Lr\theta_2 = 0,$$

e due simili equazioni. Le condizioni geometriche richieste sono quindi

$$\frac{dp}{dt} - q\theta_3 + r\theta_2 = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} - r\theta_1 + p\theta_3 = 0,$$

$$\frac{dr}{dt} - p\theta_2 + q\theta_1 = 0.$$

Se la linea OL si fa coincidere successivamente con OZ, OX, OY, assi fissi nello spazio, queste equazioni si troverà che conducono a quelle dell'Art. 93.

Quando è necessario di riferire il movimento di questi assi mobili ad altri assi fissi nello spazio, possiamo adoperare o le equazioni di questo articolo o quelle dell' Art. 93. Ritenendo la notazione del detto articolo, è chiaro (gli assi essendo considerati come un corpo che consiste semplicemente di tre linee rette) che avremo i risultati

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt}\operatorname{sen}\theta &= -\theta_1\cos\varphi + \theta_2\operatorname{sen}\varphi \\ \frac{d\theta}{dt} &= \theta_1\operatorname{sen}\varphi + \theta_2\cos\varphi \\ \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} &= \theta_3 \end{aligned}\right\}.$$

Queste equazioni determineranno θ, φ, ψ in termini delle velocità angolari θ_1, θ_2, θ_3.

98. *Esprimere le condizioni geometriche affinchè un punto di cui le coordinate rispetto agli assi mobili sono* (x, y, z) *sia fisso nello spazio.*

Questo si può fare eguagliando a zero le parti risolute della velocità del punto dato nell' Art. 95. Se l'origine degli assi mobili è fissa, le condizioni sono

$$\frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2 = 0,$$

e due simili equazioni. Se l'origine è in movimento, siano u_0, v_0, w_0 le parti risolute della sua velocità parallele agli assi, allora le condizioni richieste sono chiaramente

$$u_0 + \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2 = 0,$$

e due simili equazioni.

99. Siano i coseni di direzione di una linea retta OM fissa relativamente agli assi mobili (λ, μ, ν) e si voglia riferire il movimento di OM ad una linea retta OL fissa nello spazio i di cui coseni di direzione al tempo t sono (p, q, r). Sia θ l'angolo LOM e ψ l'angolo che il piano LOM fa con un piano fisso qualunque nello spazio condotto per OL. Allora si può mostrare che

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta = p\lambda + q\mu + r\nu, \\ &\operatorname{sen}^2\theta\frac{d\psi}{dt} = \theta_1(p - \lambda\cos\theta) + \theta_2(q - \mu\cos\theta) + \theta_3(r - \nu\cos\theta) \end{aligned}\right\}.$$

Se θ_l, θ_m sono le parti risolute delle velocità angolari intorno ad OL, OM rispettivamente, l'ultima equazione si può scrivere nella forma

$$\operatorname{sen}^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \theta_l - \theta_m \cos\theta.$$

Se la linea retta OM non è fissa relativamente agli assi, allora (λ, μ, ν) saranno variabili e dobbiamo aggiungere al secondo membro della seconda equazione

$$\left(\lambda\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\lambda}{dt}\right) r + \left(\mu\frac{d\nu}{dt} - \nu\frac{d\mu}{dt}\right) p + \left(\nu\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\frac{d\nu}{dt}\right) q.$$

100. *Spiegare un metodo per passare dagli assi fissi ai mobili.*

Se un corpo si muove intorno ad un punto fisso ed abbiamo stabilito una proposizione *generale* qualunque riferendo il suo movimento ad assi fissi che s'incontrano nel punto fisso, allora possiamo usare il metodo seguente per dedurre la proposizione corrispondente riferendo il movimento ad assi che si muovono in un modo proposto qualunque intorno all'origine. Supponiamo che l'equazione generale stabilita sia

$$\psi\left\{\omega_x, \frac{d\omega_x}{dt}, \text{etc.} \ldots\right\} = 0,$$

dove ω_x, ω_y, ω_z sono le velocità angolari intorno agli assi fissi. Siano ω_1, ω_2, ω_3 le velocità angolari del corpo intorno agli assi mobili ed il movimento degli assi sia definito dalle velocità angolari θ_1, θ_2, θ_3 intorno a loro stessi.

Gli assi fissi essendo arbitrarii di posizione, siano essi scelti in modo che, nell'istante che si considera, i tre assi mobili passino per essi, sicchè i due sistemi di assi sono per uno istante coincidenti. Allora, riferendosi all' Art. 94, vediamo che possiamo scrivere $\omega_x = \omega_1$, $\omega_y = \omega_2$, $\omega_z = \omega_3$, ma non possiamo asserire $\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}$, poichè gli assi mobili al tempo $t+dt$ non coincidono con gli assi fissi.

Per determinare la relazione fra $\frac{d\omega_z}{dt}$ e $\frac{d\omega_3}{dt}$ possiamo procedere così. Sia OL una linea retta qualunque *fissa nello spazio* che fa con gli assi mobili gli angoli α, β, γ. Sia Ω la velocità angolare del corpo intorno a questa linea retta. Allora come nell' Art. 91

$$\Omega = \omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \cos\beta + \omega_3 \cos\gamma,$$

onde
$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}\cos\alpha + \frac{d\omega_2}{dt}\cos\beta + \frac{d\omega_3}{dt}\cos\gamma$$
$$- \omega_1 \,\text{sen}\,\alpha \frac{d\alpha}{dt} - \omega_2 \,\text{sen}\,\beta \frac{d\beta}{dt} - \omega_3 \,\text{sen}\,\gamma \frac{d\gamma}{dt}.$$

Siccome OL è una linea fissa qualunque nello spazio, sia scelta in modo che l'asse mobile delle z coincida con essa al tempo t. Allora $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, e $\gamma = 0$, inoltre $\frac{d\Omega}{dt}$ sarà $\frac{d\omega_z}{dt}$. Poichè α è l'angolo che OL fa con l'asse mobile delle x, $\frac{d\alpha}{dt}$ è la ragione secondo la quale l'asse delle x si separa da una linea retta fissa coincidente con l'asse delle z e questa è chiaramente θ_2. Similmente $\frac{d\beta}{dt} = -\theta_1$, quindi $\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\theta_2 + \omega_1\theta_1$.

Similmente
$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\theta_3 + \omega_3\theta_2,$$
$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3\theta_1 + \omega_1\theta_3.$$

Se sostituiamo queste espressioni nella data equazione generale
$$\psi\left\{\omega_x, \frac{d\omega_x}{dt}, \ldots\right\} = 0,$$
avremo l'equazione corrispondente riferita agli assi mobili.

Se gli assi mobili sono fissi nel corpo, e si muovono con esso, abbiamo $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = \omega_2$, $\theta_3 = \omega_3$. In questo caso le relazioni diverranno
$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}, \quad \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt}, \quad \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt},$$
come nell'Art. 91.

La dimostrazione precedente della relazione tra $\frac{d\omega_3}{dt}$ e $\frac{d\omega_z}{dt}$ è un semplice corollario del parallelogrammo delle velocità angolari. Il risultato sarà perciò vero per ogni altra grandezza che segue la « legge del parallelogrammo ». In fatti la dimostrazione è esattamente la stessa. Ora le velocità lineari e le accelerazioni lineari seguono questa legge. Quindi le espressioni ottenute ne-

gli Art. 95, 96, per le velocità (u,v,w) e le accelerazioni (X,Y,Z) si possono dedurre da quelle dimostrate sopra.

Se l'equazione generale $\psi=0$ contenesse la velocità o l'accelerazione di un elemento qualunque del corpo, allora per ottenere l'equazione corrispondente riferita agli assi mobili, dobbiamo sostituire per queste velocità, o accelerazioni le espressioni trovate negli Art. 95 e 96.

101. Se l'equazione generale contenesse $\frac{d^2\omega_z}{dt^2}$ o altri qualunque coefficienti differenziali di secondo ordine, le espressioni da sostituire per essi diventano più complicate.

Siccome $\frac{d\omega_x}{dt}$, $\frac{d\omega_y}{dt}$, $\frac{d\omega_z}{dt}$, essendo accelerazioni angolari, seguono la legge del parallelogrammo, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\theta_3 + \omega_3\theta_2\right)\cos\alpha \\ &+ \left(\frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3\theta_1 + \omega_1\theta_3\right)\cos\beta \\ &+ \left(\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\theta_2 + \omega_2\theta_1\right)\cos\gamma.\end{aligned}$$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento ed otterremo finalmente

$$\begin{aligned}\frac{d^2\omega_z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\theta_2 + \omega_2\theta_1\right\} \\ &- \theta_2\left\{\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\theta_3 + \omega_3\theta_2\right\} \\ &+ \theta_1\left\{\frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3\theta_1 + \omega_1\theta_3\right\}.\end{aligned}$$

Così possiamo passare ai coefficienti differenziali di terzo ordine e di ordini superiori.

102. *Un corpo gira intorno ad un punto fisso in un modo qualunque, determinare i momenti della quantità di moto rispetto agli assi, cioè trovare le aree conservate intorno a quegli assi.* Si vegga Cap. II. Art. 44.

Siano (x, y, z) le coordinate di un elemento qualunque m del corpo riferito ad assi fissi nello spazio che s'incontrano nel punto fisso. Siano $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ le velocità angolari del corpo intorno agli assi fissi.

Allora il momento della quantità di moto rispetto all'asse delle z è

$$h_3 = \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Sostituendo per $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ i loro valori

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \omega_y z - \omega_z y\\ \frac{dy}{dt} &= \omega_z x - \omega_x z\end{aligned}\right\},$$

abbiamo

$$h_3 = \Sigma m(x^2 + y^2)\,\omega_z - (\Sigma m\,xz)\,\omega_x - (\Sigma m\,yz)\,\omega_y.$$

I coefficienti di ω_x, ω_y, ω_z sono i momenti ed i prodotti d'inerzia del corpo rispetto agli assi, e se gli assi sono fissi nello spazio, essi saranno generalmente variabili. In alcuni casi si troverà più conveniente di prendere come assi di riferimento tre linee rette fisse nel corpo.

Siano ω_1, ω_2, ω_3 le velocità angolari del corpo intorno agli assi rettangolari Ox', Oy', Oz' fissi nel corpo e che s'incontrano nel punto fisso O. Poichè nell'espressione data sopra per h_3 gli assi fissi possono essere qualunque, siano scelti in modo che gli assi mobili coincidano con essi al tempo t. Allora, come nella proposizione dell'Art. 100, il momento della quantità di moto rispetto all'asse mobile delle z sarà espresso dalla forma

$$h'_3 = C\omega_3 - E\omega_1 - D\omega_2,$$

dove $\quad C = \Sigma m(x'^2 + y'^2),\ \ E = \Sigma m\,x'z',\ \ D = \Sigma m\,y'z'.$

Questi saranno costanti durante il moto, ed i loro valori si possono trovare con le regole date nel Cap. I.

Se gli assi fissi nel corpo sono assi principali, allora i prodotti d'inerzia svaniranno. Le espressioni per i momenti delle quantità di moto prenderanno allora le forme semplici

$$\left.\begin{aligned}h_1' &= A\omega_1\\ h_2' &= B\omega_2\\ h_3' &= C\omega_3\end{aligned}\right\},$$

dove A, B, C sono i momenti principali del corpo.

I coseni di direzione degli assi mobili rispetto agli assi fissi nel corpo siano dati dallo schema seguente; dove, per esempio, b_3 è il coseno dell'angolo tra gli assi delle z ed y'. È stato dimostrato che la risultante delle quantità di moto di tutti gli elementi del corpo è equivalente alle tre « coppie » h_1' h_2', h_3' rispetto agli assi Ox', Oy', Oz'. Quindi il momento della quantità di moto rispetto all'asse delle z che è fisso nello spazio si può scrivere nella forma

	x, y, z
x'	a_1, a_2, a_3
y'	b_1, b_2, b_3
z'	c_1, c_2, c_3

$$h_3 = h_1' a_3 + h_2' b_3 + h_3' c_3 ,$$

la quale si troverà spesso utile.

Si può domandare di trovare il momento della quantità di moto rispetto ad assi nè fissi nello spazio nè fissi nel corpo, ma che si muovono in un modo arbitrario qualunque. Per la proposizione dell'Art. 100, vediamo che esso sarà espresso dalla stessa formola come se gli assi fossero fissi. Sicchè il momento richiesto è

$$= \Sigma m (x^2 + y^2) \omega_3 - (\Sigma m xz) \omega_1 - (\Sigma m yz) \omega_2 .$$

Se l'asse delle z coincide con l'asse istantaneo di rotazione, $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, ed ω_z è la velocità angolare risultante. Le espressioni per i momenti della quantità di moto o le aree conservate rispetto agli assi delle x, y, z diventano rispettivamente

$$- (\Sigma m xz) \omega_z ,$$

$$- (\Sigma m yz) \omega_z ,$$

$$\Sigma m (x^2 + y^2) \omega_z .$$

L' asse della coppia che è la risultante dei momenti della quantità di moto rispetto all' asse si chiama alle volte l' asse risultante delle aree. Si deve osservare che quest'asse non coincide in generale con l' asse istantaneo di rotazione. I due assi sono coincidenti solamente quando l' asse di rotazione è un asse principale.

Se si vuol trovare il momento della quantità di moto rispetto all' asse delle z di un corpo rigido che si muove in un modo qualunque nello spazio, possiamo usare il principio dimostrato nel Cap. II. Art. 43.

Nel caso di un sistema di corpi rigidi, il momento delle loro quantità di moto si può trovare addizionando i momenti separati dei diversi corpi.

103. *Un corpo gira intorno ad un punto fisso in un modo qualunque, determinare i momenti delle forze effettive rispetto agli assi.*

Siano (x, y, z) le coordinate di un elemento qualunque m del corpo riferito ad assi fissi nello spazio che s' incontrano nel punto fisso, e siano h_1, h_2, h_3 i momenti della quantità di moto rispetto agli assi.

Il momento delle forze effettive rispetto all' asse delle z è

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right),$$

e questo si può scrivere nella forma $\frac{dh_3}{dt}$.

Così i momenti delle forze effettive rispetto agli assi Ox, Oy, Oz fissi nello spazio sono rispettivamente

$$\frac{dh_1}{dt}, \quad \frac{dh_2}{dt}, \quad \frac{dh_3}{dt},$$

dove h_1, h_2, h_3 sono i valori trovati con l' ultima proposizione.

Siano h_1', h_2', h_3' i momenti della quantità di moto, trovati con l' ultimo Art., rispetto agli assi Ox', Oy', Oz' che si muovono nello spazio intorno all' origine fissa. Siano θ_1, θ_2, θ_3 le velocità angolari di questi assi rispetto alle loro direzioni istantanee. Allora siccome i momenti o le coppie seguono la legge del parallelogrammo, vediamo per la proposizione dell' Art. 100 che i momenti delle forze effettive rispetto agli assi mobili sono rispettivamente

$$\frac{dh_1'}{dt} - h_2'\theta_3 + h_3'\theta_2,$$

$$\frac{dh_2'}{dt} - h_3'\theta_2 + h_1'\theta_3,$$

$$\frac{dh_3'}{dt} - h_1'\theta_2 + h_2'\theta_1,$$

dove h_1', h_2', h_3' hanno i valori dati dall' ultima proposizione.

Se gli assi mobili sono *fissi nel corpo*, abbiamo $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = \omega_2$, $\theta_3 = \omega_3$, e le equazioni si possono semplificare. Se gli assi sono gli *assi principali* abbiamo $h_1' = A\omega_1$, $h_2' = B\omega_2$, $h_3' = C\omega_3$, ed i

momenti delle forze effettive prendono le forme semplici

$$A\frac{d\omega_1}{dt}-(B-C)\,\omega_2\omega_3,$$

$$B\frac{d\omega_2}{dt}-(C-A)\,\omega_3\omega_1,$$

$$C\frac{d\omega_3}{dt}-(A-B)\,\omega_1\omega_2,$$

dove A, B, C sono i momenti principali. Si vegga l'Art. 91.

Se si vuol trovare il momento rispetto all'asse delle z delle forze effettive sopra un corpo rigido che si muove in un modo qualunque nello spazio, possiamo adoperare il principio dimostrato nel Cap. II. Art. 43.

Nel caso di un sistema di corpi rigidi, il momento delle loro forze effettive si può trovare addizionando i momenti separati dei diversi corpi.

104. *Trovare le equazioni generali del movimento di un sistema di corpi rigidi.*

Queste equazioni sono state già trovate nel Cap. II. Art. 45, quando il sistema è riferito ad assi fissi nello spazio. Se gli assi sono mobili dobbiamo rimpiazzare le accelerazioni $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ con le forme corrispondenti nell'Art. 96 e le coppie $\frac{dh_1}{dt}$, $\frac{dh_2}{dt}$, $\frac{dh_3}{dt}$ con le espressioni nell'Art. 103.

Così, supponiamo che si riferisca il movimento a tre assi che si muovono nello spazio intorno ad un'origine fissa O. Siano X, Y, Z le forze impresse sopra un corpo rigido qualunque del sistema, includendo le reazioni ignote degli altri corpi del sistema. Siano L, M, N i momenti di queste forze rispetto ad assi condotti pel centro di gravità del corpo paralleli agli assi coordinati. Sia m la massa del corpo. Allora se adottiamo la notazione degli Art. 96 e 103, le equazioni del moto per il corpo rigido che si considera saranno

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}-v\theta_3+w\theta_2&=\frac{X}{m},\\ \frac{dv}{dt}-w\theta_1+u\theta_3&=\frac{Y}{m},\\ \frac{dw}{dt}-u\theta_2+v\theta_1&=\frac{Z}{m},\end{aligned}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned}\frac{dh_1'}{dt} - h_2'\theta_3 + h_3'\theta_2 = L\,,\\ \frac{dh_2'}{dt} - h_3'\theta_1 + h_1'\theta_3 = M\,,\\ \frac{dh_3'}{dt} - h_1'\theta_2 + h_2'\theta_1 = N\,,\end{aligned}\right\}$$

dove h_1', h_2', h_3' hanno i valori dati nell'Art. 102.

Simili equazioni si applicheranno per ciascun corpo del sistema.

Oltre queste equazioni dinamiche vi saranno le equazioni geometriche che esprimono le connessioni del sistema. Siccome ogni così forzata connessione è accompagnata da una reazione, il numero delle equazioni geometriche sarà lo stesso del numero delle reazioni ignote nel sistema.

Così abbiamo le equazioni sufficienti per determinare il moto.

105. Se due dei momenti principali nell'origine fissa O sono eguali, è spesso conveniente di scegliere come asse delle z' l'asse OC del momento disuguale, e come assi delle x', y' due altri assi OA, OB che si muovono in un modo qualunque intorno ad OC. Sia χ l'angolo che il piano di AOC fa con un piano fisso nel corpo e che passa per OC. Allora abbiamo $\theta_1 = \omega_1$, $\theta_2 = \omega_2$, e $\theta_3 = \omega_3 + \frac{d\chi}{dt}$. Inoltre, per l'Art. 102, abbiamo $h_1' = A\omega_1$, $h_2' = A\omega_2$, $h_3' = C\omega_3$. Le equazioni del moto dell'Art. 104 diventano ora

$$\left.\begin{aligned}A\left(\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\frac{d\chi}{dt}\right) - (A - C)\,\omega_2\,\omega_3 = L,\\ A\left(\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\frac{d\chi}{dt}\right) + (A - C)\,\omega_3\,\omega_1 = M,\\ C\frac{d\omega_3}{dt} \qquad\qquad\qquad\qquad = N.\end{aligned}\right\}$$

In questo caso le equazioni geometriche più convenienti per esprimere le relazioni di questi assi mobili a linee rette fisse nello spazio saranno quelle date nell'Art. 93.

Poichè $\frac{d\chi}{dt}$ è arbitrario, si può scegliere per semplificare le equazioni dinamiche o le geometriche.

Primo, possiamo porre $\frac{d\chi}{dt}=-\omega_3$. Le equazioni dinamiche allora diventano

$$A\frac{d\omega_1}{dt}+C\,\omega_2\,\omega_3=L\,,$$
$$A\frac{d\omega_2}{dt}-C\,\omega_1\,\omega_3=M\,,$$
$$C\frac{d\omega_3}{dt}\qquad\qquad=N.$$

In secondo luogo, possiamo scegliere $\frac{d\chi}{dt}$ in modo che $\varphi=0$. In questo caso il piano COA passa sempre per una linea retta OZ fissa nello spazio. Le equazioni geometriche allora diventano

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega_2\,,\quad \frac{d\psi}{dt}\operatorname{sen}\theta=-\,\omega_1\,,$$
$$-\frac{d\chi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\cos\theta=\omega_3.$$

106. Se i tre momenti principali nell'origine fissa O sono eguali, vi sono tre sistemi di assi tali che quando il movimento si riferisce ad essi, le equazioni prendono una forma semplice.

Primo. Possiamo scegliere assi fissi nello spazio. Poichè ogni asse è un asse principale nel corpo, le equazioni generali del moto diventano

$$\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{L}{A}\,,\quad \frac{d\omega_2}{dt}=\frac{M}{A}\,,\quad \frac{d\omega_3}{dt}=\frac{N}{A}.$$

Le equazioni geometriche dell'Art. 93 non sono richieste.

In secondo luogo. Possiamo scegliere un asse come quello di OC fisso nello spazio e gli altri due si muovano intorno ad esso in un modo qualunque, allora come nell'Art. 106, le equazioni del moto diventano

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt}-\omega_2\frac{d\chi}{dt}&=\frac{L}{A}\\ \frac{d\omega_2}{dt}+\omega_1\frac{d\chi}{dt}&=\frac{M}{A}\\ \frac{d\omega_3}{dt}\qquad\quad&=\frac{N}{A}\end{aligned}\right\}.$$

In terzo luogo. Possiamo prendere come assi tre linee rette qualunque ad angoli retti che si muovono nello spazio in un modo

proposto qualunque. Le equazioni del moto sono allora per l'Art. 104

$$\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\theta_3 + \omega_3\theta_2 = \frac{L}{A},$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3\theta_1 + \omega_1\theta_3 = \frac{M}{A},$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\theta_2 + \omega_2\theta_1 = \frac{N}{A}.$$

Le equazioni geometriche saranno allora le stesse di quelle date nell'Art. 93 e nell'Art. 97.

Sul Moto relativo alla Terra.

107. Il moto di un corpo sulla superficie della terra non è esattamente lo stesso come se la terra fosse in riposo. Come un'illustrazione dell'uso delle equazioni di questo capitolo, passeremo a determinare le equazioni del moto di un elemento riferito ad assi delle coordinate fissi nella terra e mobili con essa.

Sia O un punto qualunque sulla superficie della terra di cui la latitudine è λ. Così λ è l'angolo che la normale alla superficie delle acque stagnanti in O fa col piano dell'equatore. Sia l'asse delle z verticale in O e misurato positivamente nella direzione opposta alla gravità. Siano gli assi delle x e delle y rispettivamente una tangente al meridiano ed una perpendicolare ad esso, le loro direzioni positive essendo rispettivamente sud ed ovest. Sia ω la velocità angolare della terra, b la distanza del punto O dall'asse di rotazione.

Prima, possiamo ridurre il punto O in quiete applicando all'elemento un'accelerazione $\omega^2 b$ tendente dall'asse di rotazione. Ora la gravità nel punto O è la risultante dell'attrazione della terra e della forza centrifuga $\omega^2 b$. Nel nostro caso la forza che agisce sull'elemento sarà l'attrazione della terra semplicemente. Siano X_0, Y_0, Z_0 le parti risolute dell'attrazione della terra nel punto O; X_0+X, Y_0+Y, Z_0+Z le attrazioni sull'elemento. Allora la risultante di X_0, Y_0, Z_0 ed $\omega^2 b$ è la gravità in O agente verticalmente. Sia questa rappresentata da g.

Il movimento degli assi è dato da $\theta_1=\omega\cos\lambda$, $\theta_2=0$, $\theta_3=-\omega\,\mathrm{sen}\lambda$, poichè la terra gira da occidente ad oriente. Quindi per l'Art. 96 le velocità attuali di un elemento qualunque di cui le coordinate sono (x, y, z) sono

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} + \omega \operatorname{sen}\lambda\, y \\ v &= \frac{dy}{dt} - \omega\cos\lambda\, z - \omega \operatorname{sen}\lambda\, x \\ w &= \frac{dz}{dt} + \omega\cos\lambda\, y \end{aligned}\right\},$$

e sostituendo queste nelle equazioni dell'Art. 104 le equazioni del moto sono

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \operatorname{sen}\lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2 \operatorname{sen}^2\lambda x - \omega^2 \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda z = X \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\cos\lambda \frac{dz}{dt} - 2\omega \operatorname{sen}\lambda \frac{dx}{dt} - \omega^2 y = Y \\ &\frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos\lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2\cos^2\lambda z - \omega^2 \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda x = -g + Z \end{aligned}\right\}.$$

Queste equazioni si possono semplificare se trascuriamo le piccole quantità come la differenza tra la forza di gravità a differenti altezze. Se a è il raggio equatoriale della terra e g' la forza di gravità ad un'altezza z, abbiamo $g'=g\left(1-\frac{2z}{a}\right)$ prossimamente. Ora $\omega^2 a$ è la forza centrifuga all'equatore, che si sa essere $\frac{1}{289}g$. Quindi se trascuriamo il piccolo termine $g\frac{z}{a}$ possiamo trascurare anche $\omega^2 z$. Le equazioni diverranno perciò

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \operatorname{sen}\lambda \frac{dy}{dt} = X \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\cos\lambda \frac{dz}{dt} - 2\omega \operatorname{sen}\lambda \frac{dx}{dt} = Y \\ &\frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos\lambda \frac{dy}{dt} = -g + Z \end{aligned}\right\},$$

dove i termini (X, Y, Z) includono tutte le forze acceleratrici, eccetto la gravità, che agiscono sull'elemento. Queste equazioni si accordano con quelle date da Poisson, *Journal Polytechnique* 1838.

Come un esempio, consideriamo il caso di un elemento lasciato

cadere da un' altezza h. Le condizioni iniziali sono perciò x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ tutte zero e $z=h$. Come una prima approssimazione, trascuriamo tutt' i termini che contengono il piccolo fattore ω. Allora abbiamo $x=0$, $y=0$, $z=h-\frac{1}{2}gt^2$.

Per una seconda approssimazione, possiamo sostituire questi valori di x, y, z nei piccoli termini. Abbiamo dopo l'integrazione

$$x=0,\quad y=-\omega\cos\lambda g\frac{t^3}{3},\quad z=h-\frac{1}{2}gt^2.$$

Così vi sarà una piccola deviazione verso l'oriente, proporzionale al cubo del tempo della discesa. Non vi sarà alcuna deviazione sud, ed il moto verticale sarà lo stesso come se la terra fosse in quiete.

108. Per la determinazione del movimento di un proiettile si troverà conveniente di riferire il movimento ad assi situati più generalmente. Sia l' asse delle z verticale come sopra e l' asse delle x faccia un angolo β col meridiano, l' angolo essendo misurato da sud verso ovest. Allora $\theta_1=\omega\cos\lambda\cos\beta$, $\theta_2=-\omega\cos\lambda\operatorname{sen}\beta$, $\theta_3=-\omega\operatorname{sen}\lambda$. Le parti risolute della velocità dell' elemento sono

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{dx}{dt}-y\theta_3+z\theta_2\,,\\ v&=\frac{dy}{dt}-z\theta_1+v\theta_3\,,\\ w&=\frac{dz}{dt}-x\theta_2+y\theta_1\,, \end{aligned}\right\}$$

e le equazioni del moto diventano

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}\theta_3+2\frac{dz}{dt}\theta_2=X\\ &\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dz}{dt}\theta_1+2\frac{dx}{dt}\theta_3=Y\\ &\frac{d^2z}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}\theta_2+2\frac{dy}{dt}\theta_1=-g+Z \end{aligned}\right\}.$$

Queste equazioni si possono risolvere in ogni caso particolare col metodo dell' approssimazione continua. Se trascuriamo i piccoli termini otteniamo una prima approssimazione ai valori di (x, y, z). Per trovare una seconda approssimazione possiamo so-

stituire questi valori nei termini che contengono ω ed integrare le equazioni risultanti. Siccome queste equazioni sono solamente vere nella supposizione che ω^2 si possa trascurare, non possiamo procedere ad una terza approssimazione.

109. In molti casi si troverà vantaggioso di riferire il movimento ad assi non fissi nella terra ma mobili in un modo conosciuto. Sia l'asse delle z verticale come sopra e gli assi delle x e delle y si muovano lentamente intorno alla verticale con velo cità angolare $\omega \operatorname{sen} \lambda$ nella direzione da sud verso ovest. In questo caso abbiamo

$$\theta_1 = \omega \cos\lambda \cos\beta, \quad \theta_2 = -\omega \cos\lambda \operatorname{sen}\beta,$$

e

$$\theta_3 = -\omega \operatorname{sen}\lambda + \omega \operatorname{sen}\lambda = 0,$$

dove β è l'angolo che l'asse delle x fa con la tangente al meridiano, sicchè $\frac{d\beta}{dt} = \omega \operatorname{sen}\lambda$. Se, come sopra, trascuriamo le quantità che contengono il quadrato di ω come fattore, i termini che contengono $\frac{d\theta_1}{dt}$ e $\frac{d\theta_2}{dt}$ debbono essere omessi. Quindi le equazioni richieste si possono ottenere da quelle dell'Art. 108, ponendo $\theta_3 = 0$. Otteniamo così

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\cos\lambda\operatorname{sen}\beta\frac{dz}{dt} &= X \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\cos\lambda\cos\beta\frac{dz}{dt} &= Y \\ \frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos\lambda\operatorname{sen}\beta\frac{dx}{dt} + 2\omega\cos\lambda\cos\beta\frac{dy}{dt} &= -g + Z \end{aligned}\right\}.$$

Se l'elemento è costretto a muoversi in un piano orizzontale la reazione del piano entrerà solamente nell'ultima equazione ed il movimento sarà determinato dalle prime due equazioni. In questo caso poichè z è costante, le equazioni saranno indipendenti da ω. Ne segue che il movimento di un tale elemento relativo a questi assi mobili sarà esattamente lo stesso come se la terra fosse in quiete ed il movimento si riferisse ad assi fissi, le condizioni iniziali *relative* essendo le stesse in tutti e due i casi. Se quindi calcoliamo la traiettoria senza aver riguardo alla rotazione della terra, prendendo le condizioni iniziali relative agli assi mobili, si otterrà l'effetto dovuto alla rotazione della terra facendo girare questa traiettoria intorno alla verticale con velocità angolare uniforme $\omega \operatorname{sen}\lambda$.

I passi del ragionamento col quale si è giunto a questo risultato si possono stabilire così:

(1) Un punto O nel piano orizzontale si suppone sulla superficie della terra ed è ridotto in quiete. Si dimostra poi che l'elemento mentre è nelle vicinanze di O è sollecitato dal suo peso in una direzione normale alla superficie della terra.

(2) La terra gira ora intorno ad un asse condotto per O parallelo all' asse di figura con velocità angolare ω. Questa velocità angolare si risolve in due, cioè $\theta_1 = \omega \cos\lambda$ intorno ad una tangente al meridiano, e $\theta_3 = -\omega \operatorname{sen}\lambda$ intorno alla verticale in O. Ora θ_1 e θ_2 sono così piccoli che il loro prodotto si può trascurare. Quindi pel principio della sovrapposizione dei piccoli movimenti possiamo determinare il loro intero effetto addizionando insieme gli effetti prodotti da ciascuno separatamente.

(3) È un teorema noto che se un elemento è costretto a muoversi in un piano che gira intorno ad un asse qualunque in quel piano con una velocità angolare θ_1, il movimento in quel piano si può trovare riguardando il piano come fisso ed imprimendo una velocità angolare $\theta_1^2 y$ all' elemento, dove y è la distanza dell' elemento dall' asse. Questa forza impressa si trascura poichè dipende dal quadrato di ω. Quindi la velocità angolare θ_1 non ha alcun effetto sensibile.

(4) La velocità angolare $\theta_3 = -\omega \operatorname{sen}\lambda$ intorno alla normale al piano non altera in modo alcuno il reale movimento dell'elemento nello spazio. Se riferiamo il movimento ad assi che si muovono relativamente al piano con una velocità angolare intorno ad $O = \omega \operatorname{sen}\lambda$, tali assi sarebbero fissi nello spazio ed il movimento, con le stesse condizioni iniziali relative, sarà lo stesso come se la terra fosse in quiete.

Le piccole oscillazioni di un pendolo in una latitudine qualunque si possono dedurre da questo teorema.

110. Applichiamo queste equazioni a determinare il movimento di un pendolo semplice di massa m e lunghezza l. Sia mT la tensione del filo. Le equazioni del moto sono

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\cos\lambda \operatorname{sen}\beta \frac{dz}{dt} &= -T\frac{x}{l} \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\cos\lambda\cos\beta \frac{dz}{dt} &= -T\frac{y}{l} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos\lambda \operatorname{sen}\beta \frac{dx}{dt} + 2\omega\cos\lambda\cos\beta\frac{dy}{dt} &= -g - T\frac{z}{l} \end{aligned}\right\},$$

l' origine essendo presa al punto di sospensione.

Se l'oscillazione è sufficientemente piccola, z differirà da l per piccole quantità dell'ordine α^2 dove α è il semi-angolo dell'oscillazione. Se quindi possiamo rigettare i termini dell'ordine $\alpha^2\omega$ nelle espressioni delle accelerazioni, le equazioni diventano dopo l'eliminazione di T

$$\left.\begin{aligned} x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = C - 2gz \\ z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \end{aligned}\right\},$$

dalle quali è sparita ogni traccia di ω.

Le piccole oscillazioni di un pendolo sulla terra riferito ad assi che girano intorno alla verticale con velocità angolare $\omega \operatorname{sen} \lambda$ sono perciò le stesse di quelle di un pendolo immaginario sospeso da un punto assolutamente fisso.

Supponiamo quindi che il pendolo sia rimosso dalla posizione verticale per un piccolo angolo α e poi lasciato andare. Relativamente perciò agli assi che si muovono intorno alla verticale con velocità angolare $\omega \operatorname{sen} \lambda$ dobbiamo supporre l'elemento proiettato con una velocità $l \operatorname{sen} \alpha\, \omega \operatorname{sen} \lambda$ perpendicolare al piano iniziale di spostamento. Si sa allora (come può dedursi facilmente dalle equazioni dell'Art. 110 ponendo $z=-l$) che esso descrive molto prossimamente un'ellisse, il rapporto degli assi essendo $\omega \operatorname{sen} \lambda \sqrt{\frac{l}{g}}$. Vediamo che l'effetto della rotazione della terra si è di far girare questa ellisse intorno alla verticale con velocità angolare uniforme $\omega \operatorname{sen} \lambda$ in una direzione da sud ad ovest. Se l'angolo α non è così piccolo che il suo quadrato si possa trascurare, si sa dalla Dinamica di un elemento che indipendentemente da ogni considerazione della rotazione della terra vi sarà una progressione degli apsidi dell'ellisse. È perciò necessario per la riuscita dell'esperimento che la lunghezza l del pendolo sia molto grande. Questo movimento degli apsidi dipendente dalla grandezza di α è in direzione opposta a quello cagionato dalla rotazione della terra e si può perciò sempre distinguere da esso.

Si vede ancora che il tempo dell'oscillazione non è alterato dalla rotazione della terra, purchè l'arco di oscillazione sia così piccolo che gli effetti delle forze la di cui grandezza contiene il fattore $\omega\alpha^2$ si possano trascurare.

ESEMPII.

1. Il luogo dei punti di un corpo che si muove intorno ad un punto fisso i quali in un istante proposto qualunque hanno la stessa velocità attuale è un cilindro circolare. Si vegga l'Art. 81.

2. Il moto geometrico di un corpo è rappresentato da velocità angolari inversamente proporzionali a $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$, $\alpha-\beta$ intorno a tre linee che formano tre spigoli di un cubo i quali non s'incontrano nè sono paralleli. Dimostrare che il corpo gira intorno alla linea

$$(\beta-\gamma)x - a\alpha = (\gamma-\alpha)y - a\beta = (\alpha-\beta)z - a\gamma,$$

$2a$ essendo uno spigolo del cubo, il centro essendo l'origine, e gli assi paralleli agli spigoli.

3. Un corpo ha una velocità angolare ω intorno all'asse

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n},$$

dove $l^2+m^2+n^2=1$. Il moto è equivalente alle rotazioni $l\omega$, $m\omega$, $n\omega$ intorno agli assi coordinati, ed alle traslazioni $(m\gamma-n\beta)\omega$, $(n\alpha-l\gamma)\omega$, $(l\beta-m\alpha)\omega$ nelle direzioni degli assi.

4. Un corpo ha velocità angolari eguali intorno a due assi che non s'incontrano nè sono paralleli. Dimostrare che l'asse centrale del movimento è egualmente inclinato a ciascuno degli assi.

5. Un corpo è riferito ad assi rettangolari x, y, z, e l'origine rimanendo la stessa gli assi si cambiano in x', y', z', secondo lo schema in margine. Mostrare che ciò è equivalente a girare il corpo intorno ad un asse di cui le equazioni sono due qualunque delle tre seguenti:

	x', y', z'
x	a_1, a_2, a_3
y	b_1, b_2, b_3
z	c_1, c_2, c_3

$$(a_1-1)x + a_2 y + a_3 z = 0,$$

$$b_1 x + (b_2-1)y + b_3 z = 0,$$

$$c_1 x + c_2 y + (c_3-1)z = 0.$$

per un angolo θ, dove

$$3 - 4\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = a_1 + b_2 + c_3.$$

Quale è la condizione affinchè queste tre equazioni stiano insieme?

6. Se in un corpo rigido che si muove in un modo qualunque intorno ad un punto fisso si prende una serie di punti lungo una linea retta qualunque nel corpo, e per questi punti si tirino delle linee rette nelle direzioni del moto istantaneo dei punti, dimostrare che il luogo di queste linee rette è un paraboloide iperbolico.

7. Un corpo si muove da una posizione qualunque nello spazio ad un'altra, ed ogni punto del corpo nella prima posizione si congiunge con lo stesso punto nella seconda posizione. Se di tutte le linee rette così trovate si prendono quelle che passano per un punto dato esse formeranno un cono di secondo ordine. Inoltre se si prendano i punti medii di tutte queste linee, esse formeranno insieme un corpo capace di un moto infinitesimo, ciascun punto del corpo secondo la linea sulla quale esso è situato.

8. Un elemento è proiettato con velocità V in una direzione che fa un angolo α col piano orizzontale, e tale che il piano verticale condotto per la direzione della proiezione fa un angolo β col piano del meridiano, l'angolo β essendo misurato da sud verso ovest. Se x è misurato orizzontalmente nel piano di proiezione, y è misurato orizzontalmente in una direzione che fa un angolo $\beta+\frac{\pi}{2}$ col meridiano, e z verticalmente in su dal punto di proiezione, dimostrare che

$$x = V\cos\alpha t + \left(V\operatorname{sen}\alpha t^2 - \frac{1}{3}gt^3\right)\omega\cos\lambda\operatorname{sen}\beta,$$

$$y = \left(V\operatorname{sen}\alpha t^2 - \frac{1}{3}gt^3\right)\omega\cos\lambda\cos\beta + V\cos\alpha t^2\,\omega\operatorname{sen}\lambda,$$

$$z = V\operatorname{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 - V\cos\alpha t^2\,\omega\cos\lambda\operatorname{sen}\beta,$$

dove λ è la latitudine del luogo, ed ω la velocità angolare della terra intorno al suo asse di figura.

Mostrare inoltre che l'accrescimento dell'ampiezza del tiro sul piano orizzontale condotto pel punto di proiezione è

$$4\omega\frac{V^3}{g^2}\operatorname{sen}\beta\cos\lambda\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right),$$

e la deviazione a dritta del piano di proiezione è

$$4\omega\frac{V^3}{g^2}\operatorname{sen}^2\alpha\left(\cos\lambda\cos\beta\frac{\operatorname{sen}\alpha}{3} + \operatorname{sen}\lambda\cos\alpha\right).$$

9. Una palla è lanciata da un cannone presso a poco orizzontalmente con grande velocità sicchè la traiettoria è pochissimo incurvata, dimostrare che la deviazione è prossimamente eguale ad $Rt\omega\,\text{sen}\lambda$, dove R è l'ampiezza del tiro, e le altre lettere hanno lo stesso significato come nell'ultima questione. La deviazione è sempre a dritta del piano del tiro nell'emisfero Boreale, ed a sinistra nell'emisfero Australe. Si asserisce (*Comptes Rendus*, 1866) che la deviazione dovuta alla rotazione della terra calcolata con questa formola è quanto la metà della deviazione attuale nel cannone Whitworth.

10. Una palla sferica è lanciata con velocità così grande che la resistenza dell'aria si debba prendere in considerazione. Supponendo che la resistenza dell'aria sia $\dfrac{(\text{veloc.})^2}{k}$, e che la traiettoria sia poco incurvata, dimostrare che

$$x = k \log\left(1 + \frac{Vt}{k}\right)$$

$$y = \frac{2\omega\,\text{sen}\,\lambda}{V}\,k^2\left(e^{\frac{x}{k}} - \frac{x}{k} - 1\right),$$

$$z = x \tan\alpha - \frac{gk^2}{4V^2}\left(e^{\frac{2x}{k}} - 2\frac{x}{k} - 1\right)$$

$$-\frac{2\omega\,\text{sen}\,\beta\cos\lambda}{V}\,k^2\left(e^{\frac{x}{k}} - \frac{x}{k} - 1\right).$$

Queste sono date da Poisson, *Journal Polytechnique*, 1838.

11. Un elemento pesante è sospeso da un punto *fisso* di sostegno per mezzo di un filo di lunghezza a. Esso esegue delle oscillazioni ellittiche i di cui semi-assi maggiore e minore sono b e c. Se b e c sono piccoli in paragone di a, dimostrare che gli apsidi si avanzeranno per un angolo $\dfrac{3}{8}\dfrac{bc}{a^2}2\pi$ prossimamente in ciascuna completa rivoluzione dell'elemento. Se b e c non sono piccoli in paragone di a ma molto prossimamente eguali, gli apsidi si avanzeranno per un angolo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\text{sen}^2\alpha}} - 1\right)2\pi,$$

dove $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ in ciascuna rivoluzione completa dell'elemento.

12. Un pendolo in quiete relativamente alla terra è proiettato in una direzione qualunque con una piccola velocità angolare, mostrare che le oscillazioni avranno luogo in un piano verticale che gira uniformemente intorno alla verticale sicchè il pendolo diviene verticale una volta in ciascuna mezza oscillazione.

13. Sia θ l'angolo che un pendolo di lunghezza l fa con la verticale, e φ l'angolo che il piano verticale che contiene il pendolo fa con un piano verticale che gira intorno alla verticale con velocità angolare uniforme $\omega \operatorname{sen}\lambda$ in una direzione da sud ad ovest. Dimostrare che quando si trascurano i termini dipendenti da ω^2 le equazioni del moto diventano

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + A\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\right) = 2\operatorname{sen}^2\theta\cos(\varphi+\beta)\,\omega\cos\lambda\,\frac{d\theta}{dt}\,,$$

dove A è una costante arbitraria, e le altre lettere hanno i significati dati ad esse nell'Art. 108. Si vegga M. Quet nel *Journal* di Liouville, 1853.

Queste equazioni si troveranno convenienti nel trattare il movimento di un pendolo. Esse si possono ottenere facilmente trasformando quelle date nell'Art. 110 in coordinate polari.

CAPITOLO VI.

Sulla Quantità di Moto.

111. Le parole Quantità di Moto sono state messe in testa di questo Capitolo, sebbene esse esprimano solamente una parte del suo contenuto. L'oggetto del Capitolo si può enunciare nel seguente problema. Sono date le circostanze del movimento di un sistema ad un tempo qualunque t_0. Al tempo t_1 il sistema si muove sotto altre circostanze. Si vogliono determinare le relazioni che possono esistere tra questi due movimenti. Il modo nel quale questi cambiamenti sono effettuati dalle forze non forma il soggetto della ricerca. Vogliamo solamente determinare quali cambiamenti sono stati effettuati nel tempo $t-t_0$. Se il tempo $t-t_0$ è piccolissimo, e le forze sono grandissime, questo diviene il problema generale degl'impulsi. Ciò anche si considererà nel Capitolo.

112. Riferiamo il sistema ad assi fissi qualunque Ox, Oy, Oz. Allora le sei equazioni generali del movimento per l'Art. 39 si possono scrivere nella forma

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma mZ \\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \Sigma m(xY - yX) \end{aligned}\right\}.$$

Integrando queste da $t=t_0$ sino a $t=t_1$, abbiamo

$$\left[\Sigma m \frac{dz}{dt}\right]_{t_0}^{t_1} = \Sigma m \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt\,,$$

$$\left[\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right]_{t_0}^{t_1} = \Sigma m \int_{t_0}^{t_1} (xY - yX)\,dt.$$

Una forza P agisca sopra un elemento mobile m durante un tempo qualunque t_1-t_0, e si divida questo tempo in intervalli ciascuno eguale a dt. Nel mezzo di ciascuno di questi intervalli, si tiri una linea dalla posizione di m in quell'istante, per rappresentare il valore di $mPdt$ in quell'istante, in direzione e grandezza. Allora la risultante di queste forze, trovata con le regole

della Statica, si può chiamare la « forza totale » spesa nel tempo t_1-t_0. Così $\int_{t_0}^{t_1} mZ\,dt$ è la forza totale risoluta parallelamente all'asse delle z. Queste equazioni mostrano allora che

(1) Il cambiamento prodotto da forze qualunque nella parte risoluta della quantità di moto di un sistema è eguale in ogni tempo alla forza totale risoluta in quella direzione.

(2) Il cambiamento prodotto da forze qualunque nel momento della quantità di moto del sistema rispetto ad una linea retta qualunque è eguale in ogni tempo al momento totale di queste forze rispetto a quella linea retta.

Quando l'intervallo t_1-t_0 è piccolissimo, la « forza totale » spesa è la misura ordinaria di una forza impulsiva, e le equazioni precedenti sono identiche con quelle date nell'Art. 49 del Cap. II.

Non è necessario di dedurre questi due risultati dalle equazioni del moto. Il teorema generale seguente, che è realmente equivalente ai due teoremi sopra enunciati, si può ottenere facilmente con un'applicazione del principio di D'Alembert.

113. Se la quantità di moto di un elemento qualunque di un sistema in movimento si compone e si risolve, come se fosse una forza agente nella posizione istantanea dell'elemento, secondo le regole della Statica, allora le quantità di moto di tutti gli elementi ad un tempo qualunque t_1 sono insieme equivalenti alle quantità di moto ad un tempo qualunque precedente t_0 insieme con le forze totali che hanno agito durante quell'intervallo.

Nel caso in cui non altre forze agiscono nel sistema, che le azioni scambievoli degli elementi, vediamo che le quantità di moto di tutti gli elementi di un sistema in due tempi qualunque sono equivalenti; risultato che è stato già enunciato nell'Art. 40. I due principii della Conservazione della Quantità di Moto Lineare e della Conservazione delle Aree si possono enunciare come segue.

Se le forze che agiscono sopra un sistema sono tali che esse non hanno alcuna componente secondo una certa linea retta fissa, allora il movimento è tale che la quantità di moto lineare risoluta secondo questa linea è costante.

Se le forze sono tali che esse non hanno alcun momento rispetto ad una certa linea retta fissa, allora il momento della quantità di moto o l'area conservata rispetto a questa linea retta è costante.

È evidente che questi principii sono solamente casi particolari dei risultati dimostrati nell' Art. 46, Cap. II.

114. Es. 1. Supponiamo che un solo elemento m descriva un'orbita intorno ad un centro di forza O. Siano v, v' le sue velocità in due punti qualunque P, P' del suo corso. Allora mv' supposta agire secondo la tangente in P' se rivolta in senso contrario sarebbe in equilibrio con mv agente secondo la tangente in P insieme con la forza totale centrale da P in P'. Se p, p' sono lè lunghezze delle perpendicolari da O sulle tangenti in P, P', abbiamo prendendo i momenti rispetto ad O, $vp=v'p'$, e quindi vp è costante durante il moto. Inoltre se le tangenti s'incontrano in T, la forza totale centrale spesa deve agire secondo la linea TO, e si può trovare in termini di v, v' con le regole per comporre le velocità.

115. Es. 2. Supponiamo che tre elementi partano dalla quiete attraendosi scambievolmente, ma senza l'azione di alcuna forza esterna. Allora le quantità di moto dei tre elementi in un istante qualunque sono insieme equivalenti alle tre quantità di moto iniziali e sono perciò in equilibrio. Quindi in ogni istante le tangenti alle loro traiettorie si debbono incontrare in un punto, e se si tirano le parallele alle loro direzioni del moto in modo da formare un triangolo, le quantità di moto dei tre elementi stanno come i lati di quel triangolo.

Se vi sono n elementi si può mostrare nello stesso modo che le n forze rappresentate da mv, $m'v'$, etc. sono in equilibrio, e se si tirano delle parallele nelle direzioni del movimento e proporzionali alle quantità di moto degli elementi incominciando da un punto qualunque, esse formeranno un poligono chiuso.

Se F, F', F'' sono l'attrazione risultante sui tre elementi, le linee d'azione di F, F', F'' s'incontrano anche in un punto. Infatti siano X, Y, Z le azioni tra gli elementi $m'm''$, $m''m$, mm', prese in ordine. Allora F è la risultante di $-Y$ e Z; F' di X e $-Z$; F'' di Y e $-X$. Quindi le tre forze F, F', F'' sono in equilibrio, e perciò le loro linee di azione debbono incontrarsi in un punto O'. Inoltre la grandezza di ciascuna è proporzionale al seno dell'angolo tra le direzioni delle altre due. Questo punto non è generalmente fisso, e non coincide con O.

Se la legge di attrazione è proporzionale alla distanza, i due punti O, O' coincidono col centro di gravità G, e sono fissi nello spazio durante il moto. Infatti è una proposizione nota nella Statica che con questa legge di attrazione, l'intera attrazione di un sistema di elementi sopra uno degli elementi è la stessa come se

l'intero sistema fosse riunito nel suo centro di gravità. Quindi O' coincide con G. Inoltre, siccome ogni elemento parte dalla quiete, la velocità iniziale del centro di gravità è zero, e quindi per l'Art. 46, G è un punto fisso. Ancora, poichè ogni elemento parte dalla quiete ed è spinto verso un punto fisso G, esso si muoverà nella linea retta che congiunge la sua posizione iniziale con G. Quindi O coincide con G. Quando la legge di attrazione è proporzionale alla distanza, è dimostrato nella Dinamica di un Elemento, che il tempo per giungere sino al centro di forza da una posizione di quiete è indipendente dalla distanza di quella posizione di quiete. Quindi tutti gli elementi del sistema giungeranno in G nello stesso tempo, e vi s'incontreranno. Se Σm è la somma delle masse, misurate dalle loro attrazioni nel modo ordinario, si sa che il tempo è $\frac{1}{4}\frac{2\pi}{\sqrt{\Sigma m}}$.

116. Es. 3. *Tre elementi le di cui masse sono* m, m', m'', *che si attraggono scambievolmente, sono proiettati in modo che il triangolo formato unendo le loro posizioni ad ogni istante rimanga sempre simile alla sua forma originale. Si cerca di determinare le condizioni della proiezione.*

Il centro di gravità o sarà in riposo o si muoverà uniformemente in una linea retta. Possiamo perciò considerare il centro di gravità in riposo ed in seguito generalizzare le condizioni della proiezione imprimendo a ciascun elemento una velocità addizionale parallela alla direzione nella quale vogliamo che si muova il centro di gravità. Sia O il centro di gravità, e siano P, P', P'' le posizioni degli elementi ad un tempo qualunque t. Allora per le condizioni della quistione le lunghezze OP, OP', OP'' sono sempre proporzionali, e le loro velocità angolari intorno ad O sono eguali. Inoltre il momento delle quantità di moto del sistema rispetto ad O è sempre lo stesso. Onde

$$mr^2n + m'r'^2n + m''r''^2n = \text{costante},$$

dove r, r', r'' sono le distanze OP, OP', OP'', ed n è la loro comune velocità angolare. Poichè i rapporti $r:r':r''$ sono costanti, segue da questa equazione che mr^2n è costante, cioè OP descrive aree eguali in tempi eguali. Quindi, la forza risultante su di P tende verso O.

Siano ρ, ρ', ρ'' i lati $P'P''$, $P''P$, PP' del triangolo formato dagli elementi, e sia la legge di attrazione

$$\frac{\text{massa}}{(\text{dist.})^k}.$$

Allora poichè l'attrazione risultante di m', m'' su di m passa per O,

$$\frac{m'}{\rho''^k}\operatorname{sen} P'PO = \frac{m''}{\rho'^k}\operatorname{sen} P''PO,$$

ma essendo O il centro di gravità,

$$m'\rho''\operatorname{sen} P'PO = m''\rho'\operatorname{sen} P''PO.$$

Quindi o i tre elementi sono in una linea retta o $\rho''^{k+1}=\rho'^{k+1}$. Se $k=-1$ la legge di attrazione è « come la distanza ». Se k non è $=-1$, abbiamo $\rho'=\rho''$, ed il triangolo deve essere equilatero.

Viceversa, supponiamo gli elementi proiettati secondo direzioni che fanno angoli eguali con le loro distanze dal centro di gravità con velocità proporzionali a quelle distanze, e supponiamo inoltre che le attrazioni risultanti verso il centro di gravità siano proporzionali a quelle distanze, allora in tutti e tre i casi le stesse condizioni avranno luogo alla fine di un tempo dt, e così continuamente. I tre elementi descriveranno perciò orbite simili intorno al centro di gravità in una simile maniera.

Primo, supponiamo che i tre elementi debbano essere in una linea retta. Per fissare le idee, m' cada tra m ed m'', ed O tra m ed m'. Allora poichè l'attrazione sopra ogni elemento deve essere proporzionale alla distanza di quell'elemento da O, le tre attrazioni

$$\frac{m'}{(PP')^k}+\frac{m''}{(PP'')^k},\quad \frac{m''}{(P''P')^k}-\frac{m}{(PP')^k},$$

$$-\frac{m}{(PP'')^k}-\frac{m'}{(P'P'')^k},$$

debbono essere proporzionali ad OP, OP', OP''. Poichè $\Sigma mOP=0$, queste due equazioni equivalgono ad una sola in tutto. Sia $z=\frac{P'P''}{PP'}$, sicchè

$$\frac{OP}{PP'}=\frac{m'+m''(1+z)}{m+m'+m''},\quad \frac{OP'}{PP'}=\frac{-m+m''z}{m+m'+m''}.$$

Allora abbiamo

$$\left(m'+\frac{m''}{(1+z)^k}\right)(-m+m''z)=\left(\frac{m''}{z^k}-m\right)\{m'+m''(1+z)\},$$

il che è d'accordo col risultato dato da Laplace, da cui questo problema fu per la prima volta considerato.

Nel caso in cui l'attrazione segue la legge della natura $k=2$ e l'equazione diviene

$$mz^2\{(1+z)^3-1\}-m'(1+z)^2(1-z^3)-m''\{(1+z)^3-z^3\}=0.$$

Questa è un'equazione di quinto grado, ed ha perciò sempre una radice reale. Il primo membro dell'equazione ha segni opposti quando $z=0$ e $z=\infty$, e quindi questa radice reale è positiva. È sempre possibile perciò di proiettare le tre masse in modo che esse rimangano in una linea retta. Laplace osserva che se m è il sole, m' la terra, ed m'' la luna, abbiamo molto prossimamente $z=\sqrt[3]{\frac{m+m''}{3m}}=\frac{1}{100}$. Se quindi originalmente la terra e la luna fossero state situate nella stessa linea retta col sole alle distanze dal sole proporzionali ad 1 ed $1+\frac{1}{100}$, e se le loro velocità fossero state inizialmente parallele e proporzionali a quelle distanze, la luna sarebbe stata sempre in opposizione al sole. La luna sarebbe stata troppo distante per essere in uno stato di continuo ecclissi, e così sarebbe stata piena ogni notte. Si è dimostrato però nel *Journal* di Lionville che un tale moto sarebbe instabile.

Le traiettorie degli elementi saranno ellissi simili aventi il centro di gravità per un fuoco comune.

In secondo luogo. Supponiamo che la legge di attrazione sia « come la distanza ». In questo caso l'attrazione su ciascun elemento è la stessa come se tutti e tre gli elementi fossero riuniti nel centro di gravità. Ciascun elemento descriverà un'ellisse che ha questo punto per centro nello stesso tempo. Le condizioni necessarie della proiezione sono che le velocità di proiezione siano proporzionali alle distanze iniziali dal centro di gravità, e le direzioni della proiezione facciano angoli eguali con quelle distanze.

In terzo luogo. Supponiamo che gli elementi siano ai vertici di un triangolo equilatero. La forza risultante sull'elemento m è

$$\frac{m'}{\rho''^k}\cos P'PO+\frac{m''}{\rho'^k}\cos P''PO.$$

La condizione affinchè le forze sugli elementi siano proporzionali alle loro distanze da O mostra che il rapporto di questa forza alla distanza OP è lo stesso per tutti gli elementi. Essendo

$$m'\rho''\cos P'PO+m''\rho'\cos P''PO=(m+m'+m'')\,OP,$$

è chiaro che la condizione è inizialmente soddisfatta quando

$\rho = \rho' = \rho''$. Quindi, con lo stesso ragionamento di sopra, se gli elementi sono proiettati con velocità eguali in direzioni che fanno angoli eguali con OP, OP', OP'' rispettivamente, essi rimarranno sempre ai vertici di un triangolo equilatero.

117. Quando il sistema che si considera consiste di corpi rigidi dobbiamo usare i risultati dell'Art. 42 per trovare le parti risolute della quantità di moto in una direzione qualunque. Il momento della quantità di moto rispetto ad una linea retta qualunque si può anche trovare con l'Art. 43 nel Cap. II. combinato con l'Art. 64 nel Cap. IV, se il movimento è in due dimensioni, o con l'Art. 102 nel Cap. V, se il moto è in tre dimensioni.

118. Es. 4. *Un disco di forma qualunque si muove nel suo proprio piano in un modo qualunque. Subitaneamente si fissa un punto* O *nel disco, trovare la velocità angolare del disco intorno ad* O.

Supponiamo che immediatamente prima che O diventi fisso il centro di gravità G si muova con velocità V, e che p sia la lunghezza della perpendicolare da O sulla direzione del movimento. Inoltre sia ω la velocità angolare del corpo intorno al suo centro di gravità. Immediatamente dopo che O è divenuto fisso, il corpo giri intorno ad O con velocità angolare ω'. Sia Mk^2 il momento d'inerzia del disco intorno al centro di gravità, e sia $OG = r$.

Il cambiamento nel moto del disco è prodotto da forze impulsive agenti in O durante un piccolo tempo $t_1 - t_0$. Queste forze non hanno alcun momento rispetto ad O. Quindi il momento della quantità di moto rispetto ad O è lo stesso immediatamente dopo ed immediatamente prima dell'urto. Immediatamente prima che O diventasse fisso, il momento della quantità di moto rispetto a G era $Mk^2\omega$ (Art. 64), ed il momento della quantità di moto dell'intera massa riunita in G era MVp. Quindi l'intero momento della quantità di moto rispetto ad O è la somma di questi due (Art. 43). Immediatamente dopo che O è divenuto fisso il corpo gira intorno ad O, quindi per l'Art. 64 il momento della quantità di moto rispetto ad O è $M(k^2+r^2)\omega'$. Eguagliando questi abbiamo

$$M(k^2 + r^2)\,\omega' = Mk^2\omega + MVp;$$

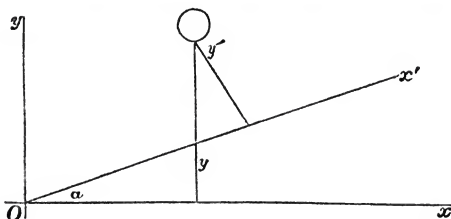
onde

$$\omega' = \frac{k^2\omega + Vp}{k^2 + r^2}.$$

119. Es. 5. *Un disco di forma qualunque gira intorno ad un asse* Ox *situato nel suo proprio piano con una velocità angolare*

ω. *Subitaneamente quest'asse è lasciato libero ed un altro asse* Ox', *anche situato nel piano del disco, diviene fisso, si cerca di trovare la nuova velocità angolare* ω' *intorno ad* Ox'.

Il cambiamento del moto del disco è prodotto dall'azione delle forze impulsive dovute al subitaneo fissare dell'asse Ox'. Queste agiscono in punti situati in Ox' e non hanno alcun momento rispetto ad Ox'. Quindi il momento della quantità di moto rispetto ad Ox' è lo stesso immediatamente prima ed immediatamente dopo che Ox' è fisso.

Sia $d\sigma$ un elemento qualunque dell'area del disco; y, y' siano

le sue distanze da Ox, Ox'. Allora $y\omega, y'\omega'$ sono le velocità di $d\sigma$ immediatamente prima ed immediatamente dopo dell'urto. I momenti della quantità di moto rispetto ad Ox' immediatamente prima ed immediatamente dopo sono perciò $yy'\omega d\sigma$ ed $y'^2\omega' d\sigma$. Sommando questi per l'intera area del disco, abbiamo

$$\omega' \Sigma y'^2 d\sigma = \omega \Sigma yy' d\sigma \text{ .... (1).}$$

Primo, siano Ox, Ox' paralleli, sicchè il punto O è all'infinito. Sia h la distanza fra gli assi, allora $y' = y - h$. Quindi abbiamo

$$\omega' \Sigma y'^2 d\sigma = \omega \{ \Sigma y^2 d\sigma - h \Sigma y d\sigma \}.$$

Siano A, A' i momenti d'inerzia del disco rispetto ad Ox, Ox' rispettivamente, y_1 la distanza del centro di gravità da Ox, M la massa del disco. Allora abbiamo

$$A'\omega' = \omega (A - Mhy_1).$$

In secondo luogo, Ox ed Ox' non siano paralleli. Sia O l'origine e l'angolo $xOx' = \alpha$, allora

$$y' = y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha.$$

Sia F il prodotto d'inerzia del disco rispetto ad Ox, Oy dove Oy è perpendicolare ad Ox. Allora con la sostituzione in (1) abbiamo

$$A'\omega' = \omega (A \cos\alpha - F \operatorname{sen}\alpha).$$

120. *Un corpo rigido si muove liberamente nello spazio in un modo conosciuto. Subitaneamente o una linea retta o un punto nel corpo diviene fisso. Determinare il moto iniziale susseguente.*

Questa proposizione includerà gli ultimi due esempii come casi particolari. È chiaro che tutte le azioni impulsive sul corpo passano per la linea retta fissa o per il punto fisso. Quindi i momenti della quantità di moto del corpo rispetto all'asse fisso nel primo caso o rispetto ad un asse qualunque condotto per il punto fisso nel secondo caso non sono alterati dalle forze impulsive.

Primo. Una linea retta diventi subitaneamente fissa. Si prenda tale retta come asse delle z.

Sia MK^2 il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse delle z, ed Ω la velocità angolare dopo che la linea retta è divenuta fissa. Supponiamo che il corpo quando si muoveva liberamente girasse con velocità angolari ω_x, ω_y, ω_z intorno a tre linee rette Gx', Gy', Gz' condotte pel centro di gravità parallele agli assi delle coordinate. E le coordinate del centro di gravità siano x_1, y_1, z_1.

Allora

$$C'\omega_z - (\Sigma mz'x')\,\omega_x - (\Sigma mz'y')\,\omega_y + M\left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right) = MK^2\cdot\Omega,$$

dove C' è il momento d'inerzia del corpo rispetto a Gz', e $\Sigma mz'x'$, $\Sigma mz'y'$ sono calcolati rispetto agli assi Gx', Gy', Gz'.

In secondo luogo. Un punto P nel corpo in movimento sia fissato subitaneamente nello spazio. Si prendano tre assi rettangolari qualunque Ox, Oy, Oz, e tre assi paralleli Gx', Gy', Gz' pel centro di gravità G. Siano ω_x, ω_y, ω_z le note velocità angolari del corpo intorno agli assi Gx', Gy', Gz' prima che il punto O diventi fisso, Ω_x, Ω_y, Ω_z le velocità angolari ignote intorno ad Ox, Oy, Oz dopo che O è divenuto fisso.

Allora, seguendo la stessa notazione come sopra, abbiamo

$$A'\omega_x - (\Sigma mx'y')\,\omega_y - (\Sigma mx'z')\,\omega_z + \Sigma m\left(y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}\right) = A\Omega_x - (\Sigma mxy)\,\Omega_y - (\Sigma mxz)\,\Omega_z.$$

$$B'\omega_y - (\Sigma my'z')\,\omega_z - (\Sigma my'x')\,\omega_x + \Sigma m\left(z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt}\right) = B\Omega_y - (\Sigma myz)\,\Omega_z - (\Sigma myx)\,\Omega_x.$$

$$C'\omega_z - (\Sigma mz'x')\,\omega_x - (\Sigma mz'y')\,\omega_y + \Sigma m\left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right) = C\Omega_z - (\Sigma mzx)\,\Omega_x - (\Sigma mzy)\,\Omega_y.$$

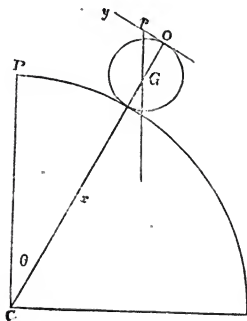
Queste equazioni determinano Ω_x, Ω_y, Ω_z. È molto ovvio che esse si possono semplificare grandemente scegliendo in modo gli assi che uno dei due sistemi Ox, Oy, Oz o Gx', Gy', Gz' sia un sistema di assi principali.

121. Es. *Una sfera in colatitudine* θ *pende da un punto* O *nella sua superficie in equilibrio sotto l'azione della gravità. Subitaneamente cessa la rotazione della terra, si cerca di determinare il moto della sfera.*

Sia G il centro della sfera, O il suo punto di sospensione, ed a il suo raggio. Sia C il centro della terra. Supponiamo tracciata la figura in modo che la sfera si muova allontanandosi dall'osservatore.

Sia ω = velocità angolare della terra, allora se $CG = \mu a$, la sfera gira intorno ad un asse Gp parallelo a CP, l'asse della terra, con velocità angolare ω, mentre il centro di gravità si muove con velocità $\mu a \operatorname{sen} \theta \cdot \omega$.

Si prendano OC, Op, e la perpendicolare al piano di OC, Op per assi delle x, y, z rispettivamente, e siano Ω_x, Ω_y, Ω_z le velocità angolari intorno ad essi immediatamente dopo che cessa la rotazione della terra.

Per l'Art. 120, le quantità di moto angolari rispetto ad Ox, immediatamente prima ed immediatamente dopo che la rotazione cessi, sono eguali tra loro; onde

$$Mk^2 \omega \cos \theta = Mk^2 \Omega_x ,$$

dove Mk^2 è il momento d'inerzia della sfera rispetto ad un diametro.

Ancora, le quantità di moto angolari rispetto ad Oy sono eguali tra loro; onde

$$- Mk^2 \omega \operatorname{sen} \theta + M\mu a^2 \omega \operatorname{sen} \theta = M(k^2 + a^2) \Omega_y .$$

Finalmente, le quantità di moto angolari rispetto ad Oz sono eguali; onde

$$0 = Mk^2 \Omega_z .$$

Risolvendo queste equazioni, otteniamo

$$\Omega_y = \omega \operatorname{sen}\theta \frac{-k^2+\mu a^2}{k^2+a^2}$$

$$= \omega \operatorname{sen}\theta \frac{-2+5\mu}{7}.$$

Ma $\Omega_x = \omega \cos\theta.$

Sommando insieme i quadrati di Ω_x, Ω_y, Ω_z abbiamo

$$\Omega^2 = \omega^2 \left\{ \cos^2\theta + \left(\frac{-2+5\mu}{7}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \right\},$$

dove Ω è la velocità angolare della sfera intorno al suo asse istantaneo.

Il Piano Invariabile.

122. Si è mostrato nell' Art. 40 del Cap. II. che tutte le quantità di moto dei diversi elementi di un sistema in movimento, sono insieme equivalenti ad una sola quantità di moto lineare risultante in un' origine O presa ad arbitrio, rappresentata in direzione e grandezza da una linea OV, insieme con una quantità di moto angolare rispetto ad una linea che passa per O, rappresentata in direzione e grandezza da una linea OH. Siano h_1, h_2, h_3 i momenti delle quantità di moto degli elementi rispetto a tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz che s'incontrano in O, sicchè

$$h_1 = \Sigma m \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} \right),$$

con simili espressioni per h_2, h_3, e sia

$$h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2.$$

Allora i coseni di direzione di OH sono $\frac{h_1}{h}$, $\frac{h_2}{h}$, $\frac{h_3}{h}$ e la quantità di moto angolare stessa è rappresentata da h.

Se nessuna forza esterna agisce sul sistema allora h_1, h_2, h_3 sono costanti durante il moto, Art. 40, quindi OH è fissa in grandezza e direzione. Essa si chiama perciò la linea invariabile in O, ed un piano perpendicolare ad OH si chiama il piano invariabile in O.

Questo piano si può convenientemente usare come un piano di riferimento col quale si possono determinare le posizioni dei corpi ad ogni tempo. Esso si può dedurre ad un tempo posteriore qua-

lunque dai movimenti dei corpi che formano il sistema, appunto come si può trovare la posizione del centro di gravità, sicchè la conoscenza della sua posizione non può essere perduta. Nel caso del sistema solare, possiamo, per esempio, riferire le inclinazioni dei piani delle orbite a questo piano fisso.

123. La posizione del piano invariabile nel centro di gravità del sistema solare si può trovare nel modo seguente. Sia riferito il sistema ad assi rettangolari qualunque che s'incontrano nel centro di gravità. Sia ω la velocità angolare di un pianeta qualunque intorno al suo asse di rotazione. Sia Mk^2 il suo momento d'inerzia rispetto a quell'asse, e siano (α, β, γ) gli angoli di direzione di quell'asse. L'asse di rotazione e due assi perpendicolari formano un sistema di assi principali nel centro di gravità. La quantità di moto angolare rispetto all'asse di rotazione è $Mk^2\omega$, e quindi la quantità di moto angolare rispetto ad un asse parallelo all'asse delle z è $Mk^2\omega\cos\gamma$. Il momento della quantità di moto dell'intera massa riunita nel centro di gravità rispetto all'asse delle z è

$$M\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

quindi abbiamo

$$h_3 = Mk^2\omega\cos\gamma + M\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right).$$

I valori di h_1, h_2 si possono trovare in simil modo. La posizione del piano invariabile è allora conosciuta.

Se i pianeti che formano il sistema si riguardano come sfere sicchè le loro attrazioni scambievoli agiscano secondo le linee rette che uniscono i loro centri, i movimenti intorno ai loro centri saranno sempre gli stessi. In questo caso possiamo riguardarli come un sistema di punti che si attraggono scambievolmente. Questo è ciò che si fa usualmente, ed i termini dipendenti dalle rotazioni dei pianeti nei valori precedenti di h_1, h_2, h_3 allora si omettono. Il piano così trovato è normale all'asse della coppia di quantità di moto dovuta ai movimenti delle diverse masse riunite nei loro centri di gravità. Esso non è perciò rigorosamente fisso nello spazio, poichè le attrazioni dei pianeti non agiscono rigorosamente secondo le linee rette che congiungono i loro centri di gravità. Ma in un tempo comunque lungo i cambiamenti prodotti nelle rotazioni dei pianeti sono così piccoli in paragone degli altri termini ritenuti nelle espressioni di h_1, h_2, h_3 che il piano si può riguardare come fisso.

124. Se una linea retta qualunque OL si tira per O facendo un angolo θ con la linea invariabile OH in O, la quantità di moto angolare rispetto ad OL è $h\cos\theta$. Infatti l'asse della coppia di quantità di moto risultante è OH, e la parte risoluta rispetto ad OL è perciò $OH\cos\theta$. Quindi la linea invariabile in O si può anche definire come quell'asse condotto per O rispetto al quale il momento della quantità di moto è massimo.

125. In differenti punti del sistema la posizione della linea invariabile è diversa. Ma le regole con le quali queste linee sono connesse sono le stesse di quelle che connettono gli assi della coppia risultante di un sistema di forze quando si varia l'origine di riferimento. Queste sono state già stabilite nell'Art. 88 del Cap. V, e basta qui di riferirci generalmente ad esse.

Forze impulsive in tre Dimensioni.

126. *Determinare le equazioni generali del movimento di un corpo intorno ad un punto fisso sotto l'azione di dati impulsi.*

Il punto fisso si prenda come origine, e siano ω_x', ω_y', ω_z' le velocità angolari *generate dagl'impulsi* intorno ad assi coordinati rettangolari qualunque. Pel Principio di D'Alembert, si vegga l'Art. 50, la differenza tra i momenti delle quantità di moto degli elementi del sistema immediatamente prima ed immediatamente dopo l'azione degl'impulsi è eguale al momento degl'impulsi. Quindi per l'Art. 102 del Cap. V.,

$$\left.\begin{aligned} A\omega_x' - (\Sigma mxy)\,\omega_y' - (\Sigma mxz)\,\omega_z' &= L \\ B\omega_y' - (\Sigma myz)\,\omega_z' - (\Sigma myx)\,\omega_x' &= M \\ C\omega_z' - (\Sigma mzx)\,\omega_x' - (\Sigma mzy)\,\omega_y' &= N \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (1),$$

dove L, M, N sono i momenti delle forze impulsive rispetto agli assi.

Queste tre equazioni basteranno per determinare i valori di ω_x', ω_y', ω_z'. Queste essendo aggiunte alle velocità angolari prima dell'impulso, si trova il moto iniziale del corpo dopo dell'impulso.

Si deve osservare che queste equazioni lasciano gli assi di riferimento indeterminati. Essi si debbono scegliere in modo che i valori di A, Σmxy, etc. si possano trovare nel modo più facile. Se le posizioni degli assi principali nel punto fisso sono conosciute essi si troveranno in generale i più convenienti.

In quel caso le equazioni si riducono alla forma semplice

$$\left.\begin{aligned} A\omega_x' &= L \\ B\omega_y' &= M \\ C\omega_z' &= N \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

I valori di ω_x', ω_y', ω_z' essendo conosciuti, possiamo trovare le pressioni nel punto fisso. Infatti pel Principio di D'Alembert il cambiamento nella quantità di moto lineare del corpo in una direzione qualunque è eguale alla parte risoluta delle forze impulsive. Quindi se F, G, H, sono le pressioni del punto fisso nel corpo

$$\begin{aligned} \Sigma X + F &= M \cdot \frac{dx'}{dt} \text{ per l'Art. 49} \\ &= M(\omega_y' z' - \omega_z' y') \text{ per l'Art. 89} \\ \Sigma Y + G &= M(\omega_z' x' - \omega_x' y') \\ \Sigma Z + H &= M(\omega_x' y' - \omega_y' x'). \end{aligned}$$

127. Se il corpo è libero, il moto intorno al centro di gravità sarà lo stesso come se quel punto fosse fisso. Quindi gli assi essendo tre linee rette qualunque che s'incontrano nel centro di gravità, le velocità angolari del corpo si possono sempre trovare dalle equazioni (1) e (2). Il movimento del centro di gravità si può trovare da (3). Siano u_1, v_1, w_1, u_1', v_1', w_1' le parti risolute delle velocità del centro di gravità prima e dopo degl'impulsi, e sia M l'intera massa. Allora queste equazioni diventano

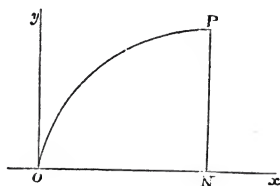
$$u_1' - u_1 = \frac{\Sigma X}{M},$$

$$v_1' - v_1 = \frac{\Sigma Y}{M},$$

$$w_1' - w_1 = \frac{\Sigma Z}{M},$$

Sul soggetto generale degli urti il lettore può consultare un Articolo nel *Journal* di Liouville, Vol. XIV.

128. Es. *Una porzione di parabola limitata da un'ordinata* PN, *l'asse* ON, *e la curva* OP, *ha il suo vertice* O *fisso. Un urto* P *è dato ad essa perpendicolarmente al suo piano nell'altra estremità del contorno curvilineo. Supponendola in quiete prima dell'urto, trovare il movimento iniziale.*

Sia l'equazione della parabola $y^2=4ax$.

Allora $\qquad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0.$

Sia μ la massa di una unità dell'area, M l'intera massa, ed $ON=c$, allora

$$\Sigma mxy = \mu \iint xydxdy = \mu \int x\frac{y^2}{2}\,dx \begin{cases} y=0 \\ y=y \end{cases}$$

$$= 2\mu \int ax^2\,dx = \frac{2}{3}\,\mu ac^3 \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=c \end{cases}$$

$$= M\,\frac{\sqrt{ac^3}}{2}.$$

Inoltre $\qquad A = \frac{1}{3}\mu \int_0^c y^3dx = \frac{16}{15}\mu a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{5}{2}} = M\cdot\frac{4ac}{5},$

$$B = \mu \int_0^c x^2ydx = \frac{4}{7}\,\mu a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{7}{2}} = M\,\frac{3c^2}{7};$$

e le equazioni sono

$$\left.\begin{array}{l} A\omega_x - \frac{2}{3}\,\mu ac^3\omega_y = -P\cdot 2\,\sqrt{ac} \\ B\omega_y - \frac{2}{3}\,\mu ac^3\omega_x = \quad Pc \\ (A+B)\,\omega_z = 0 \end{array}\right\},$$

dalle quali ω_x, ω_y si possono facilmente trovare.

E le pressioni sul punto fisso si possono trovare dalle equazioni

$$F=0, \quad G=0,$$

$$P+H = M(\omega_x y' - \omega_y x').$$

L'asse intorno al quale il corpo *incomincia* a girare fa un angolo con Ox, di cui la tangente è

$$\tan\theta = \frac{\omega_y}{\omega_x},$$

e la velocità angolare iniziale $= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$.

Ma il corpo non *continuerà* a girare intorno a questo asse a meno che non sia anche un asse principale.

129. Prop. *Mostrare che possiamo prendere i momenti rispetto all' asse iniziale di rotazione come se fosse un asse fisso.*

Siano l, m, n i coseni di direzione dell' asse iniziale di rotazione; sia I il momento d'inerzia, ed Ω la velocità angolare del corpo intorno ad esso. Sia G' il momento delle forze rispetto allo stesso asse. Allora

$$\omega_x = l\Omega, \quad \omega_y = m\Omega, \quad \omega_z = n\Omega.$$

Quindi le equazioni del moto diventano

$$Al\Omega = L, \quad Bm\Omega = M, \quad Cn\Omega = N.$$

Moltiplicando queste per l, m, n, ed addizionando, abbiamo

$$(Al^2 + Bm^2 + Cn^2)\,\Omega = Ll + Mm + Nn,$$

o sia

$$I \cdot \Omega = G'.$$

130. Prop. *Un corpo in quiete essendo sollecitato da impulsi qualunque, si cerca di trovare la condizione affinchè il moto risultante sia solamente di rotazione.*

È stato dimostrato che il movimento di un corpo qualunque si può sempre rappresentare con un moto di rotazione intorno ad un certo asse, ed un moto di traslazione nella direzione dell'asse. La condizione affinchè il movimento sia solamente di rotazione è, per l' Art. 84,

$$u_1'\omega_x' + v_1'\omega_y' + w_1'\omega_z' = 0.$$

Sostituendo per u_1', etc., ω_x', etc. i loro valori in termini delle forze dati negli Art. 126 e 127, questa diviene

$$\frac{L\Sigma X}{A} + \frac{M\Sigma Y}{B} + \frac{N\Sigma Z}{C} = 0.$$

Questa condizione è necessaria, ma non è sufficiente. È anche necessario che L, M, N non svaniscano tutte.

ESEMPII.

1. Un cono gira intorno al suo asse con una nota velocità angolare. L'altezza incomincia a diminuire e l'angolo a crescere, il volume essendo costante. Mostrare che la velocità angolare è proporzionale all'altezza.

2. Un disco circolare gira nel suo proprio piano intorno al suo centro; se un punto nella circonferenza diviene fisso, trovare la nuova velocità angolare.

3. Una verga uniforme di lunghezza $2a$ posta sopra un piano orizzontale levigato passa attraverso un anello che permette alla verga di girare liberamente nel piano orizzontale. Il punto medio della verga essendo indefinitamente vicino all'anello s'imprime ad essa una velocità angolare qualunque; mostrare che quando essa lascia l'anello il raggio vettore del punto medio avrà descritto un'area eguale ad $\frac{a^2}{6}$.

4. Un guscio sferico contiene una cavità sferica interna il di cui diametro è un raggio del guscio, e che è ripiena di fluido della stessa densità della materia del guscio. Si dà un impulso tangenziale al guscio nell'estremità del diametro della cavità; mostrare che la velocità angolare comunicata al sistema è $\frac{32}{31}$ volte quella che sarebbe stata se il fluido fosse stato solido e rigidamente connesso col guscio.

5. Una lamina ellittica gira intorno al suo centro sopra una tavola orizzontale levigata. Se ω_1, ω_2, ω_3 sono le sue velocità angolari rispettivamente quando si fissa l'estremità del suo asse maggiore, il suo fuoco, e l'estremità dell'asse minore, dimostrare che

$$\frac{7}{\omega_1} = \frac{6}{\omega_2} + \frac{5}{\omega_3}.$$

6. Un corpo rigido mobile intorno ad un punto fisso O nel quale i momenti principali sono A, B, C è colpito da un urto di data grandezza in un punto dato. Se la velocità angolare così impressa sul corpo è la massima possibile, dimostrare che (a, b, c) essendo le coordinate del punto dato riferito agli assi principali in O, ed (l, m, n) i coseni di direzione dell'urto, allora

$$al + bm + cn = 0,$$

$$\frac{a}{l}\left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2}\right) + \frac{b}{m}\left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{A^2}\right) + \frac{c}{n}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right) = 0.$$

7. Una lamina triangolare ABC ha il vertice C fisso ed è capace di libero movimento intorno ad esso. Si dà un urto in B perpendicolarmente al piano del triangolo. Dimostrare che l'asse iniziale di rotazione è quel trisettore del lato AB che è più lontano da C.

8. Un corpo girando intorno ad un asse che passa pel suo centro di gravità, un punto nel corpo diviene subitaneamente fisso. Se il nuovo asse istantaneo è un asse principale rispetto al punto, mostrare che il luogo del punto è un'iperbole rettangolare.

9. Un cubo gira con velocità angolare ω intorno ad una diagonale, quando uno dei suoi spigoli che non incontra la diagonale diviene subitaneamente fisso. Mostrare che la velocità angolare intorno a questo spigolo come asse $= \frac{\omega}{4\sqrt{3}}$.

10. Due masse m, m' sono connesse da un sottile filo levigato che passa intorno ad un cilindro retto circolare di raggio a. I due elementi sono in movimento in un piano non essendo sollecitati da forze, mostrare che se A è la somma delle aree assolute descritte in un tempo t dalle due porzioni non avviluppate del filo

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) T,$$

T essendo la tensione del filo ad un tempo qualunque.

11. Un pezzo di filo metallico in forma di un circolo giace in riposo col suo piano in contatto con una tavola orizzontale levigata, quando un insetto su di esso parte subitaneamente camminando lungo l'arco con velocità relativa uniforme. Mostrare che il filo gira intorno al suo centro con velocità angolare uniforme mentre quel centro descrive un circolo nello spazio con velocità angolare uniforme.

12. Un filo metallico circolare uniforme di raggio a mobile intorno ad un punto fisso nella sua circonferenza, giace sopra un piano orizzontale levigato. Un insetto di massa eguale a quella del filo si trascina lungo di esso, partendo dall'estremità del diametro opposta al punto fisso, la sua velocità relativa al filo essendo uniforme ed eguale a V. Dimostrare che dopo un tempo t il filo avrà girato per un angolo

$$\frac{Vt}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{Vt}{2a}\right).$$

13. Un piccolo insetto si muove lungo una sbarra uniforme di

massa eguale a sè stesso, e di lunghezza $2a$, le estremità della quale sono costrette a rimanere sulla circonferenza di un circolo fisso, di raggio $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Supponendo che l'insetto parta dal punto medio della sbarra, e la sua velocità relativamente alla sbarra sia uniforme ed eguale a V; dimostrare che la sbarra nel tempo t girerà per un angolo

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{Vt}{a} .$$

14. Un disco circolare uniforme mobile intorno al suo centro nel suo proprio piano (che è orizzontale) ha una sottile scannellatura tagliata secondo un raggio, ed è messo in rotazione con velocità angolare ω. Un piccolo razzo il di cui peso è $\frac{1}{n}$ del peso del disco è situato nell'estremità interna della scannellatura e scaricato; e quando esso è uscito dalla scannellatura, si fa lo stesso con un altro razzo eguale, e così di seguito. Trovare la velocità angolare dopo n di queste operazioni, e se n cresce indefinitamente, mostrare che il valore limite della stessa è ωe^{-2}.

15. Un corpo rigido gira intorno ad un asse condotto pel suo centro di gravità, quando un certo punto del corpo diviene istantaneamente fisso, l'asse essendo simultaneamente lasciato libero; trovare le equazioni del nuovo asse istantaneo; e dimostrare che, se esso è parallelo all'asse primitivamente fisso, il punto deve giacere nella linea rappresentata dalle equazioni

$$a^2 lx + b^2 my + c^2 nz = 0 ,$$

$$(b^2 - c^2) \frac{x}{l} + (c^2 - a^2) \frac{y}{m} + (a^2 - b^2) \frac{z}{n} = 0 ;$$

gli assi principali pel centro di gravità essendo presi come assi delle coordinate, a, b, c essendo i raggi di girazione rispetto a queste linee, ed l, m, n i coseni di direzione dell'asse primitivamente fisso rispetto ad esse.

CAPITOLO VII.

Forza Viva.

131. Siano x, y, z le coordinate di un elemento m di un sistema in movimento ad un dato istante qualunque; e siano X, Y, Z le forze acceleratrici che agiscono sull'elemento risolute nelle direzioni degli assi. Allora, la somma estendendosi a tutto il sistema, la funzione

$$\Sigma m (Xdx + Ydy + Zdz)$$

sarà in generale un differenziale completo di una quantità U. Questa quantità U, quando esiste, si chiama la *funzione della forza*.

Questo nome è stato dato ad essa da W. Hamilton e Jacobi indipendentemente l'uno dall'altro.

132. Prop. I. *Dimostrare che vi sarà una funzione della forza primo, quando le forze tendono a centri fissi a distanze finite, e sono funzioni delle distanze da quei centri; ed in secondo luogo, quando le forze sono dovute alle attrazioni o ripulsioni scambievoli degli elementi del sistema, e sono funzioni delle distanze tra gli elementi che attraggono o repellono.*

Sia $m\varphi(r)$ l'azione di un centro fisso di forza sopra un elemento m alla distanza r, valutata nella direzione nella quale si misura r, cioè *dal* centro di forza. Allora tutte le forze dovute ai diversi centri di forza sono esattamente equivalenti a tutte le loro diverse componenti mX, mY, mZ. Quindi, rivolgendo in senso contrario le ultime, vi sarà equilibrio. Onde, per le Velocità Virtuali,

$$\Sigma m\varphi(r)\,dr = \Sigma m (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Così esiste la funzione della forza, ed è eguale a

$$\Sigma m \int \varphi(r)\,dr.$$

Se la legge di attrazione è il quadrato inverso $\varphi(r) = -\frac{\mu}{r^2}$, e l'integrale diviene $\frac{\mu}{r}$. Così la funzione della forza diviene ciò che si è chiamato in Statica il Potenziale.

Nello stesso modo si può mostrare che vi sarà una funzione della forza quando le forze sono quelle che risultano dall'attra-

zione scambievole degli elementi, purchè le attrazioni siano funzioni solamente delle distanze tra gli elementi.

Sia $mm'\varphi(r)$ l'azione tra due elementi m, m', di cui la distanza scambievole è r; e, come sopra, questa forza si consideri positiva quando è ripulsiva. Allora abbiamo

$$\Sigma mm'\varphi(r)\,dr = \Sigma m(Xdx + Ydy + Zdz),$$

e la funzione della forza è eguale a

$$\Sigma mm'\int\varphi(r)\,dr.$$

133. Prop. II. *Se un sistema riceve un piccolo spostamento* ds *parallelo ad una data linea retta ed uno spostamento angolare* $d\theta$ *intorno a quella linea, allora i coefficienti differenziali parziali* $\frac{dU}{ds}$ e $\frac{dU}{dt}$ *rappresentano rispettivamente la parte risoluta di tutte le forze secondo la linea ed il momento delle forze rispetto ad essa.*

Poichè dU è la somma dei momenti virtuali di tutte le forze dovuti ad uno spostamento qualunque, essa è indipendente dagli assi coordinati. Si prenda come asse delle z la linea retta secondo la quale si misura ds.

Ritenendo la stessa notazione come sopra,

$$dU = \Sigma m(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Ma $dx=0$, $dy=0$, e $dz=ds$, quindi abbiamo

$$dU = ds\cdot\Sigma mZ\,;$$

onde
$$\frac{dU}{ds} = \Sigma mZ.$$

Qui dU dinota il cambiamento prodotto in U dal solo spostamento del sistema, preso come un corpo, parallelo alla data linea retta, per uno spazio ds. Ancora, il momento di tutte le forze rispetto all'asse delle z è

$$\Sigma m(xY - yX),$$

ma per l'Art. 89, $dx=-yd\theta$, $dy=xd\theta$, e $dz=0$, quindi il momento precedente è

$$= \Sigma m\frac{Ydy + Xdx + Zdz}{d\theta}$$
$$= \frac{dU}{d\theta}.$$

Qui dU è il cambiamento prodotto in U dalla sola rotazione del sistema, preso come un corpo, intorno all'asse dato, per un angolo $d\theta$.

134. Def. La *Forza Viva* di un elemento è il prodotto della sua massa pel quadrato della sua velocità.

Se un sistema è in movimento sotto l'azione di forze finite, e se le relazioni geometriche delle parti del sistema sono espresse da equazioni che non contengono il tempo esplicitamente, il cambiamento nella forza viva del sistema passando da una posizione ad un'altra è eguale a due volte il cambiamento corrispondente prodotto nella funzione della forza.

Nel determinare la funzione della forza si possono ammettere tutte le forze che non apparirebbero nell'equazione delle Velocità Virtuali.

Siano x, y, z le coordinate di un elemento qualunque m, e siano X, Y, Z le parti risolute nelle direzioni degli assi delle forze impresse acceleratrici agenti sull'elemento.

Le forze effettive agenti sull'elemento m al tempo t sono

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Se le forze effettive su tutti gli elementi si rivolgono in senso contrario, esse saranno in equilibrio con l'intero gruppo delle forze impresse per l'Art. 37. Quindi, pel principio delle velocità virtuali,

$$\Sigma m\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0,$$

dove δx, δy, δz sono dei piccoli spostamenti arbitrarii qualunque dell'elemento m compatibili con le relazioni geometriche al tempo t.

Ora se le relazioni geometriche sono espresse da equazioni che non contengono il tempo esplicitamente, le relazioni geometriche che valgono al tempo t valeranno durante il tempo δt; e quindi possiamo prendere gli spostamenti *arbitrarii* δx, δy, δz eguali rispettivamente agli spostamenti *attuali*

$$\frac{dx}{dt}\delta t, \quad \frac{dy}{dt}\delta t, \quad \frac{dz}{dt}\delta t$$

dell'elemento nel tempo δt.

Facendo questa sostituzione, l'equazione diviene

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)$$
$$=\Sigma m\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right).$$

Integrando, otteniamo

$$\Sigma m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$
$$=C+2\Sigma m\int(Xdx+Ydy+Zdz),$$

dove C è la costante da determinarsi per mezzo delle condizionali iniziali del movimento.

Siano v e v' le velocità dell'elemento m ai tempi t e t'. Inoltre siano U ed U' i valori della funzione della forza per il sistema nelle due posizioni che esso ha ai tempi t e t'. Allora

$$\Sigma mv'^2-\Sigma mv^2=2(U'-U).$$

135. La seguente illustrazione, presa da Poisson, può mostrare più chiaramente perchè è necessario che le relazioni geometriche non contengano il tempo esplicitamente. Sia, per esempio,

$$\varphi(x,y,z,t)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

una relazione geometrica qualunque che lega le coordinate dell'elemento m. Questa si può riguardare come l'equazione di una superficie mobile sulla quale l'elemento è costretto a rimanere. Le quantità δx, δy, δz sono le proiezioni sugli assi di uno spostamento arbitrario qualunque dell'elemento m compatibile con le relazioni geometriche che hanno luogo al tempo t. Esse debbono perciò soddisfare l'equazione

$$\frac{d\varphi}{dx}\delta x+\frac{d\varphi}{dy}\delta y+\frac{d\varphi}{dz}\delta z=0.$$

Le quantità $\frac{dx}{dt}\delta t$, $\frac{dy}{dt}\delta t$, $\frac{dz}{dt}\delta t$ sono le proiezioni sugli assi dello spostamento dell'elemento dovuto al suo movimento nel tempo δt. Esse debbono perciò soddisfare l'equazione

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt}\delta t+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dt}\delta t+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dt}\delta t+\frac{d\varphi}{dt}\delta t=0.$$

Quindi a meno che non sia $\frac{d\varphi}{dt}$ zero durante l'intero movimento non possiamo prendere δx, δy, δz rispettivamente eguali a

$$\frac{dx}{dt}\delta t,\quad \frac{dy}{dt}\delta t,\quad \frac{dz}{dt}\delta t.$$

L'equazione $\frac{d\varphi}{dt}=0$ esprime la condizione affinchè l'equazione geometrica (1) non contenga il tempo esplicitamente.

136. L'equazione delle Velocità Virtuali nella Statica si sa che contiene in una formola tutte le condizioni di equilibrio. Nello stesso modo l'equazione generale

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=\Sigma m\,(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

si può fare che dia tutte le equazioni del movimento scegliendo convenientemente gli spostamenti arbitrarii δx, δy, δz. Nell'ultimo Articolo si fece una scelta di questi spostamenti e così si ottenne un'equazione in una forma integrabile.

Se diamo all'intero sistema uno spostamento parallelo all'asse delle z abbiamo $\delta x=0$, $\delta y=0$, e δz è arbitrario. L'equazione allora diviene

$$\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma mZ,$$

che rappresenta una delle tre prime equazioni generali del movimento nell'Art. 39.

Se diamo all'intero sistema uno spostamento intorno all'asse delle z per un angolo $\delta\theta$, abbiamo $\delta x=-y\,\delta\theta$, $\delta y=x\,\delta\theta$, $\delta z=0$. L'equazione allora diviene

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma m\,(xY-yX),$$

che rappresenta una delle tre ultime equazioni generali del movimento nell'Art. 39.

137. Una forza P agisca sopra un elemento che descrive l'arco elementare ds nel tempo dt. Sia dp la proiezione di ds sulla linea d'azione di P stimata positiva nella direzione secondo la quale P agisce. Allora Pdp si chiama « *il lavoro* » fatto dalla forza P nel tempo dt. Se una forza agisce continuamente sopra un elemento

durante un tempo T, allora il lavoro sarà chiaramente rappresentato da $\int_0^T \frac{Pdp}{dt}dt$. Siano X, Y, Z le parti risolute nelle direzioni degli assi delle forze acceleratrici che agiscono sopra un elemento qualunque m. Allora l'intero « lavoro » fatto, mentre il sistema passa da una posizione ad un'altra, è

$$W = \Sigma m \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Siano U, U' i valori della funzione della forza del sistema corrispondenti alle due posizioni del sistema. Allora

$$W = U' - U.$$

Pel principio della forza viva abbiamo

$$\Sigma mv'^2 - \Sigma mv^2 = 2(U' - U).$$

Quindi il cambiamento nella forza viva di un sistema passando da una posizione ad un'altra è eguale a due volte il « lavoro » fatto dalle forze durante il moto.

Possiamo usare l'espressione « funzione della forza » per indicare l'integrale indefinito U e la parola « lavoro » per indicare lo stesso preso tra dati limiti.

Supponiamo che un peso mg sia situato ad un'altezza qualunque al di sopra della superficie della terra. Allora cadendo da un'altezza z si può fare per mezzo di una macchina che esso esegua un « lavoro » misurato da mgz. Ciò segue dal principio delle velocità virtuali. Se esso non pone in opera alcuna macchina esso ha acquistato una forza viva, la metà della quale è eguale ad $m\frac{v^2}{2}$ o mgz. Se esso cade per un secondo spazio z', si può fare o che esegua più lavoro per mezzo della macchina o che generi una semi-forza viva addizionale eguale a mgz'. E così di seguito fino a che esso cade per quanto le circostanze lo permettono. Dopo ciò non si può eseguire ulteriore lavoro dal peso sino a che non sia stato innalzato di nuovo. Se esso si eleva all'altezza h proiettandolo con la conveniente velocità v, scomparisce una quantità di semi-forza viva misurata da $m\frac{v^2}{2} = mgh$. O se il peso è portato in su da una macchina ciò misura il lavoro fatto dalla macchina. In ogni caso il peso ha ora acquistato una capacità da fare lavoro misurato da mgh. Così vediamo che la forza viva si può cambiare in una capacità da fare lavoro, e viceversa.

Applichiamo questo ragionamento al caso generale di un sistema di elementi non assoggettato a forze esterne ma solamente alle azioni scambievoli delle sue diverse parti. Supponiamo che il sistema sia passato dalla sua disposizione al tempo t_0, che possiamo prendere come principio del movimento, alla sua disposizione al tempo t. Sia t_1 un altro tempo qualunque maggiore di t_0 e tale che si abbia bisogno solamente di considerare il movimento tra i due tempi t_0 e t_1. Se è necessario t_1 si può riguardare come infinitamente grande. Sia W_0 il lavoro fatto dalle azioni scambievoli mentre il sistema passa dalla disposizione al tempo t_0 a quella al tempo t_1, W il lavoro fatto mentre esso passa dalla disposizione al tempo t a quella al tempo t_1. Sia T_0 la semi-forza viva attuale al tempo t_0, T quella al tempo t. Allora per l'equazione della forza viva, abbiamo

$$T - T_0 = W_0 - W,$$

o

$$T + W = T_0 + W_0.$$

Quindi apparisce che la quantità $T + W$ è costante durante il moto. Per esprimere ciò la parola « *energia* » è stata introdotta da W. J. M. Rankine. L'attuale energia al tempo t è la semi-forza viva del sistema in quell'istante. L'energia potenziale è il rimanente lavoro, positivo o negativo, che si può fare eseguire dalle forze nel muovere il sistema dalla sua disposizione al tempo t alla disposizione in un altro tempo fisso avvenire. Il principio asserisce che la somma di queste due è costante durante il moto.

Se delle forze esterne agiscono sul sistema l'energia totale attuale e potenziale si accresce positivamente o negativamente di una quantità eguale al lavoro fatto dalle forze esterne, nel passare il sistema dalla sua posizione al tempo t_0 alla sua posizione al tempo t.

138. Nell'applicare il principio della forza viva ai casi particolari, sarà importante di conoscere anticipatamente a quali forze e reazioni interne si può non avere riguardo nel formare l'equazione. La regola generale si è che si possono trascurare tutte le forze che non appariscono nell'equazione delle velocità virtuali. Queste forze si possono enumerare come segue:

I. Quelle reazioni le di cui velocità virtuali sono zero.

1. Quelle la di cui linea d'azione passa per un asse istantaneo.

2. Quelle la di cui linea d'azione è perpendicolare alla direzione del movimento del punto d'applicazione; come le reazioni delle *superficie fisse levigate*, ma non quelle delle superficie mobili.

II. Quelle reazioni le di cui velocità virtuali non sono zero e che perciò entrerebbero nell'equazione, ma che spariscono quando vanno unite ad altre reazioni.

1. Le reazioni tra gli elementi la di cui distanza scambievole rimane la stessa; come le tensioni dei *fili inestensibili*, ma non quelle dei fili elastici.

2. La reazione tra due corpi rigidi, parti dello stesso sistema, che rotolano l'uno sull'altro. È necessario però d'includere tutti e due questi corpi nella *stessa* equazione della forza viva.

III. Tutte le tensioni che agiscono secondo fili inestensibili, anche quando i fili sono piegati passando per anelli fissi levigati. Infatti un filo la di cui tensione è T congiunga gli elementi m, m', e passi per un anello lontano rispettivamente per r, r' dagli elementi. La velocità virtuale è chiaramente

$$T\delta r + T\delta r',$$

poichè la tensione agisce secondo il filo. Ma essendo il filo inestensibile

$$\delta r + \delta r' = 0\,;$$

quindi la velocità virtuale è zero.

139. Se un sistema non è sollecitato da forze esterne, abbiamo $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, e quindi la forza viva del sistema è costante.

Se, però, le reazioni scambievoli tra le parti del sistema sono tali da apparire nell'equazione dei momenti virtuali, allora la forza viva del sistema non sarà costante. Così, anche se il sistema solare non fosse sollecitato da forze esterne, la sua forza viva non sarebbe costante. Infatti le attrazioni scambievoli tra i varii pianeti sono reazioni tra elementi le di cui distanze non rimangono le stesse, e quindi la somma dei momenti virtuali non sarà zero.

Ancora, se la terra si riguarda come un corpo che gira intorno ad un asse e si contrae lentamente per la perdita di calore nel corso del tempo, la forza viva non sarà costante, per la stessa ragione di sopra. L'accrescimento di velocità angolare prodotto da questa contrazione si può trovare facilmente per mezzo della conservazione delle aree.

140. La gravità sia la sola forza che agisce sul sistema. L'asse delle z sia verticale, allora abbiamo $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$. Quindi l'equazione della forza viva diviene

$$\Sigma mv'^2 - \Sigma mv^2 = -2Mg(z'-z).$$

Così la forza viva del sistema dipende solamente dall' altezza del centro di gravità. Se si tira un piano orizzontale qualunque, la forza viva del sistema è la stessa sempre che il centro di gravità attraversa il piano.

141. *Determinare la forza viva di un corpo rigido in movimento.*

Se un corpo si muove in un modo qualunque la sua forza viva in un istante qualunque è eguale alla forza viva dell'intera massa riunita nel suo centro di gravità, più la forza viva intorno al centro di gravità considerato come un punto fisso: o sia

La forza viva di un corpo = forza viva dovuta alla traslazione + forza viva dovuta alla rotazione.

Siano x, y, z le coordinate di un elemento di cui la massa è m e la velocità v, e siano x', y', z' le coordinate del centro di gravità G del corpo. Sia $x=x'+x_1$, $y=y'+y_1$, $z=z'+z_1$. Allora per una proprietà del centro di gravità $\Sigma m x_1 = 0$, $\Sigma m y_1 = 0$, $\Sigma m z_1 = 0$. Quindi

$$\Sigma m \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dz_1}{dt} = 0.$$

Ora la forza viva del corpo è

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\}.$$

Sostituendo per x, y, z, questa diviene

$$\Sigma m \left\{ \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 \right\} + \Sigma m \left\{ \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \right\}$$
$$+ 2\frac{dx'}{dt}\Sigma m \frac{dx_1}{dt} + 2\frac{dy'}{dt}\Sigma m \frac{dy_1}{dt} + 2\frac{dz'}{dt}\Sigma m \frac{dz_1}{dt}.$$

Tutt'i termini nell'ultima linea svaniscono come deve essere per l'Art. 10. Il primo termine nella prima linea è la forza viva dell'intera massa Σm, riunita nel centro di gravità. Il secondo termine è la forza viva dovuta alla rotazione intorno al centro di gravità.

Questa espressione della forza viva si può mettere in una forma più conveniente.

Primo. *Sia il movimento in due dimensioni.* Sia v' la velocità del centro di gravità, e siano r', θ' le sue coordinate polari riferite ad un'origine qualunque nel piano del movimento. Sia

r_1 la distanza di un elemento di massa m dal centro di gravità, e sia v_1 la sua velocità relativamente al centro di gravità. Sia ω la velocità angolare dell'intero corpo intorno al centro di gravità, ed Mk^2 il suo momento d'inerzia rispetto allo stesso punto.

La forza viva dell'intera massa riunita in G è Mv'^2, la quale pel Calcolo Differenziale si può porre in ciascuna delle forme

$$Mv'^2 = M\left\{\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2\right\} = M\left\{\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 + r'^2\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2\right\}.$$

La forza viva rispetto a G è Σmv_1^2. Ma poichè il corpo gira intorno a G, abbiamo $v_1 = r_1\omega$. Quindi

$$\Sigma mv_1^2 = \omega^2 \cdot \Sigma mr_1^2 = \omega^2 \cdot Mk^2.$$

Quindi l'intera forza viva del corpo è

$$\Sigma mv^2 = Mv'^2 + Mk^2\omega^2.$$

Se il corpo gira intorno ad un asse istantaneo, di cui la distanza dal centro di gravità è r, abbiamo $v' = r\omega$. Quindi

$$\Sigma mv^2 = M\omega^2 (r^2 + k^2) = Mk'^2\omega^2,$$

dove Mk'^2 è il momento d'inerzia rispetto all'asse istantaneo.

In secondo luogo. *Sia il corpo in movimento nello spazio di tre dimensioni.*

Sia v' la velocità di G; e siano r', θ', φ' le sue coordinate polari riferite ad un'origine qualunque. Siano ω_x, ω_y, ω_z le velocità angolari del corpo intorno a tre assi qualunque ad angoli retti che s'incontrano in G, e siano A, B, C i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi. Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate di un elemento m riferito a questi assi.

La forza viva dell'intera massa riunita in G è Mv'^2, la quale (pel Calcolo Differenziale) si può mettere in ciascuna delle seguenti forme:

$$Mv'^2 = M\left\{\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right\}$$

$$= M\left\{\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 + r'^2 \operatorname{sen}^2\theta' \left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2 + r'^2\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2\right\}.$$

La forza viva dovuta al movimento intorno a G è

$$\Sigma mv_1^2 = \Sigma m\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}.$$

Ma
$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \omega_y z_1 - \omega_z y_1\\ \frac{dy_1}{dt} &= \omega_z x_1 - \omega_x z_1\\ \frac{dz_1}{dt} &= \omega_x y_1 - \omega_y x_1\end{aligned}\right\}.$$

Sostituendo questi valori, otteniamo, poichè

$$A = \Sigma m(y_1^2 + z_1^2), \quad B = \Sigma m(z_1^2 + x_1^2), \quad C = \Sigma m(x_1^2 + y_1^2),$$
$$\Sigma m v_1^2 = A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2$$
$$- 2(\Sigma m x_1 y_1)\,\omega_x\omega_y - 2(\Sigma m y_1 z_1)\,\omega_y\omega_z - 2(\Sigma m z_1 x_1)\,\omega_z\omega_x.$$

Se gli assi delle coordinate sono gli assi principali in G, questo si riduce a

$$\Sigma m v_1^2 = A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2.$$

Se il corpo gira intorno ad un punto O, la di cui posizione è fissa per il momento, si può dimostrare nello stesso modo che la forza viva è

$$\Sigma m v^2 = A'\omega_x^2 + B'\omega_y^2 + C'\omega_z^2,$$

dove A', B', C' sono i momenti principali d'inerzia al punto O, ed ω_x, ω_y, ω_z sono le velocità angolari del corpo intorno agli assi.

142. Es. *Un filo metallico circolare può girare liberamente intorno ad un diametro verticale come asse fisso, ed una pallina può scorrere liberamente lungo di esso sotto l'azione della gravità. L'intero sistema essendo messo in rotazione intorno all'asse verticale, trovare il movimento susseguente.*

Siano M ed m le masse dell'anello e della pallina, ω la loro comune velocità angolare intorno alla verticale. Sia a il raggio dell'anello, Mk^2 il suo momento d'inerzia rispetto al diametro. Il centro dell'anello sia l'origine, e l'asse delle y sia misurato verticalmente in giù. Sia θ l'angolo che il raggio condotto dal centro dell'anello alla pallina fa con l'asse delle y.

È evidente, poichè la gravità agisce verticalmente e tutte le reazioni all'asse fisso debbono passare per l'asse, che il momento di tutte le forze rispetto al diametro verticale è zero. Quindi, prendendo i momenti rispetto alla verticale, abbiamo

$$Mk^2\omega + ma^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\omega = h.$$

E pel principio della forza viva,

$$Mk^2\omega^2 + m\left\{a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta\omega^2\right\} = C + 2mga\cos\theta.$$

Queste due equazioni basteranno per la determinazione di $\frac{d\theta}{dt}$ ed ω. Risolvendole, abbiamo

$$\frac{h^2}{Mk^2 + ma^2\operatorname{sen}^2\theta} + ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C + 2mga\cos\theta.$$

Questa equazione non si può integrare, e quindi θ non si può trovare in termini di t. Per determinare le costanti h e C dobbiamo ricorrere alle condizioni iniziali del movimento. Supponendo che inizialmente $\theta = \pi$, e $\frac{d\theta}{dt}=0$ ed $\omega=\alpha$, allora $h=Mk^2\alpha$ e $C=2mga+Mk^2\alpha^2$.

143. L'equazione della Forza Viva si può applicare al caso del moto relativo nel modo seguente. *Supponiamo che il sistema ad un istante qualunque diventi fisso al sistema di assi mobili relativamente al quale si cerca il movimento, e si calcoli quali sarebbero allora le forze effettive sul sistema. Se applichiamo queste come forze impresse addizionali al sistema, ma in direzione opposta, possiamo adoperare l'equazione della Forza Viva per determinare il moto relativo come se gli assi fossero fissi nello spazio.*

Siano (x, y, z) le coordinate di un elemento m riferito ad assi qualunque Ox, Oy, Oz fissi nello spazio. Siano $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ gli assi mobili relativamente ai quali si cerca il movimento. Siano Δx, Δy, Δz le variazioni prodotte in (x, y, z) da un movimento degli assi $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$, supponendo che l'elemento sia rigidamente connesso con essi. Siano dx, dy, dz le variazioni prodotte da un movimento relativo agli assi $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ supponendoli fissi per il momento. Se quindi $d\cdot x$, $d\cdot y$, $d\cdot z$ sono gli attuali cambiamenti prodotti in (x, y, z) durante il tempo dt, abbiamo

$$d\cdot x = dx + \Delta x,$$

con simili equazioni per y e z.

L'equazione generale del movimento è

$$\Sigma m\left(\frac{d^2\cdot x}{dt^2}\delta x + \ldots\right) = \Sigma m\,(X\delta x + \ldots).$$

Facciamo che gli spostamenti arbitrarii $\delta x, \delta y, \delta z$ siano gli spostamenti relativi dx, dy, dz. Abbiamo

$$\Sigma m\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{d\Delta x}{dt^2}+\frac{\Delta^2 x}{dt^2}\right)dx+\ldots\right\}=\Sigma m\,(Xdx+\ldots).$$

Il movimento lineare di O' ad un istante qualunque sia dato dalle velocità (u, v, w) parallele agli assi fissi, ed il movimento angolare di $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ dalle velocità angolari $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ rispetto ad assi condotti per O' paralleli ad Ox, Oy, Oz. Allora

$$\frac{\Delta x}{dt}=u-y\theta_3+z\theta_2;$$

onde

$$\frac{d\Delta x}{dt^2}=-\frac{dy}{dt}\theta_3+\frac{dz}{dt}\theta_2;$$

poichè il simbolo d indica un movimento relativo agli assi mobili, supponendoli fissi pel momento. Simili equazioni si applicano per $\frac{d\Delta y}{dt^2}$ e $\frac{d\Delta z}{dt^2}$. Quindi

$$\frac{d\Delta x}{dt^2}dx+\frac{d\Delta y}{dt^2}dy+\frac{d\Delta z}{dt^2}dz=0.$$

Sostituendo, l'equazione della Forza Viva diviene

$$\Sigma m\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\Delta^2 x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}+\ldots\right\}=\Sigma m\left(X\frac{dx}{dt}+\ldots\right).$$

Se Σmv^2 è la forza viva calcolata pel moto relativo come se gli assi fossero fissi, abbiamo

$$\frac{d}{dt}\Sigma mv^2=\Sigma m\left\{\left(X-\frac{\Delta^2 x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}+\ldots\right\},$$

che è l'espressione analitica del teorema.

Nell'art. 79 è stata data una regola per determinare il moto di un elemento costretto a rimanere su di una curva che gira intorno ad un dato asse fisso. Con questo teorema possiamo ora estendere la regola al caso in cui la curva si muove in un dato modo qualunque.

ESEMPII.

1. Una sbarra uniforme si muove sopra una tavola orizzontale intorno ad una estremità, spingendo innanzi a sè un elemento di

massa eguale alla sua, il quale parte dalla quiete infinitamente vicino all'estremità fissa: mostrare che quando l'elemento ha descritto una distanza r lungo la sbarra, la sua direzione del moto fa con la sbarra un angolo

$$\tan^{-1} \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}}.$$

2. Un sottile tubo uniforme levigato si bilancia orizzontalmente intorno al suo punto medio, che è fisso; una verga uniforme di sezione eguale alla base del tubo è situata estremo contro estremo in una linea col tubo, ed è poi spinta in esso con tale velocità orizzontale che il suo punto medio potrà solo giungere precisamente sino a quello del tubo; supponendo nota la velocità di proiezione, trovare la velocità angolare del tubo e della verga nel momento della coincidenza dei loro punti medii.

Risultato. Se m è la massa della verga, m' quella del tubo, e $2a$, $2a'$ le loro lunghezze rispettive, v la velocità di proiezione della verga, ω la velocità angolare richiesta, allora

$$\omega^2 = \frac{3mv^2}{ma^2 + m'a'^2}.$$

3. Un sottile tubo circolare, portando con sè un elemento pesante, è messo in rotazione intorno ad un diametro verticale. Mostrare che la differenza dei quadrati delle velocità assolute dell'elemento in due dati punti qualunque del tubo equidistanti dall'asse è la stessa per tutte le velocità iniziali dell'elemento e del tubo.

4. Una vite di Archimede è capace di girare liberamente intorno al suo asse, che è fisso in una posizione verticale: un elemento pesante è messo in cima del tubo e scende per esso; determinare l'intera velocità angolare comunicata alla vite.

Risultato. Sia n il rapporto della massa della vite a quella dell'elemento, α l'angolo che la tangente alla vite fa con l'orizzonte, h l'altezza discesa dall'elemento. Allora la velocità angolare generata è

$$= \sqrt{\frac{2gh \cos^2 \alpha}{a^2 (n + 1)(n + \operatorname{sen}^2 \alpha)}}.$$

5. Un cono di massa m e di angolo verticale 2α si può muovere liberamente intorno al suo asse, ed ha una sottile scannel-

latura levigata tagliata sulla sua superficie tale da fare un angolo costante β con le linee generatrici del cono. Un elemento pesante di massa P si muove lungo la scannellatura sotto l'azione della gravità, il sistema essendo inizialmente in quiete con l'elemento ad una distanza c dal vertice. Mostrare che se θ è l'angolo pel quale il cono ha girato quando l'elemento è ad una distanza r dal vertice, allora

$$\frac{mk^2 + Pr^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{mk^2 + Pc^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = e^{2\theta \operatorname{sen}\alpha . \cot\beta},$$

k essendo il raggio di girazione del cono rispetto al suo asse.

6. Due travi eguali connesse da un ganghero nei loro centri di gravità in modo da formare una X sono situate simmetricamente sopra due caviglie levigate nella stessa linea orizzontale, la distanza tra le quali è b. Mostrare che, se le travi sono perpendicolari tra loro nel principio del moto, la velocità del loro centro di gravità quando giunge nella linea che unisce le caviglie è eguale a $\sqrt{\frac{b^3 g}{b^2 + 4k^2}}$, dove k è il raggio di girazione di ciascuna trave rispetto ad una linea perpendicolare ad essa nel suo centro di gravità.

7. Se un filo elastico, di cui la naturale lunghezza è quella di una verga uniforme, è legato alla verga nei due estremi e sospeso dal punto medio, dimostrare per mezzo della forza viva che la verga scenderà finchè i fili siano inclinati all'orizzonte sotto un angolo θ, che soddisfa all'equazione

$$\cot^3 \frac{\theta}{2} - \cot \frac{\theta}{2} - 2n = 0,$$

dove la tensione del filo, quando è disteso sino al doppio della sua lunghezza, è n volte il peso.

Se il filo è sospeso da un punto, non nel mezzo, trovare l'equazione della forza viva.

8. Un anello metallico circolare, che porta una pallina, giace sopra una tavola orizzontale levigata; un filo elastico di cui la lunghezza naturale è minore del diametro dell'anello, ha un estremo legato alla pallina e l'altro ad un punto nell'anello; la pallina è situata inizialmente in modo che il filo coincide molto prossimamente con un diametro dell'anello; trovare la forza viva del

sistema quando il filo si è contratto sino alla sua originale lunghezza.

9. Un tubo rettilineo di data lunghezza è capace di girare liberamente intorno ad una estremità in un piano orizzontale, due elementi eguali sono situati in differenti punti dentro di esso in quiete, si dà una velocità angolare al sistema, determinare la velocità di ciascun elemento nel lasciare il tubo.

10. Due elementi di masse m, m' sono congiunte da un filo inelastico di lunghezza a. Il primo è messo in una scannellatura rettilinea levigata ed il secondo è proiettato in una direzione perpendicolare alla scannellatura con una velocità V. Dimostrare che l'elemento m oscillerà per uno spazio $\frac{2am'}{m+m'}$, e se m è grande in paragone di m' il tempo dell'oscillazione è prossimamente $\frac{\pi a}{V}\left(1-\frac{m'}{4m}\right)$.

11. Le estremità dell'asse di un solido uniforme di rotazione simmetrico rispetto al suo equatore, scorrono liberamente su due verghe levigate che s'intersegano ad angoli retti, una delle quali è fissa e verticale e l'altra gira liberamente intorno ad essa, il loro punto d'intersezione essendo fisso. Una velocità angolare λ intorno alla verga verticale è impressa al sistema mentre il solido gira con una velocità angolare n intorno al suo asse, che è inizialmente inclinato sotto un angolo α alla verticale. Dimostrare che

$$(Ma^2+A)\,\text{sen}^2\theta\frac{d\varphi}{dt} + Cn\cos\theta = (Ma^2+A)\,\lambda\,\text{sen}^2\alpha + Cn\cos\alpha,$$

$$(Ma^2+A)\left\{\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos\theta\,\text{sen}\theta\right\} + Cn\frac{d\varphi}{dt}\,\text{sen}\theta = -Mga\,\text{sen}\,\theta,$$

M essendo la massa del solido, $2a$ la lunghezza del suo asse; C, A i suoi momenti d'inerzia rispetto al suo asse di figura e rispetto ad un diametro equatoriale rispettivamente, θ l'inclinazione dell'asse alla verticale, e φ l'angolo pel quale la verga orizzontale ha girato dopo un tempo t.

12. Le estremità di una trave pesante uniforme di lunghezza $2a$ scorrono su di un filo metallico levigato in forma della curva di cui l'equazione è $r=a(1-\cos\theta)$ il primo raggio essendo verticale ed il vertice della curva in giù. Dimostrare che se la trave è messa in una posizione verticale e spostata con una velocità

sufficiente appunto per portarla in una posizione orizzontale

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\left\{e^{\sqrt{\frac{3g}{2a}}\,t} - e^{-\sqrt{\frac{3g}{2a}}\,t}\right\},$$

dove θ è l'angolo pel quale la verga ha girato dopo un tempo t.

13. Un corpo rigido di cui il raggio di girazione rispetto al centro di gravità G è k, è legato ad un punto fisso C per mezzo di un filo attaccato ad un punto A della sua superficie. $CA\,(=b)$ ed $AG\,(=a)$ sono inizialmente in una linea, ed a G si dà una velocità V ad angoli retti su quella linea. Si suppone che non vi siano forze impresse, ed il filo è legato in modo da rimanere sempre in una linea retta. Se θ è l'angolo tra AG ed AC al tempo t, mostrare che

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{V^2}{b^2}\,\frac{k^2 - 4ab\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}{k^2 + a^2\,\text{sen}^2\theta},$$

e se l'amplitudine di θ, cioè $2\,\text{sen}^{-1}\dfrac{k}{2\sqrt{ab}}$ è molto piccola, il periodo è $\dfrac{2\pi bk}{V\sqrt{a(a+b)}}$.

14. Un sottile filo senza peso che ha un elemento in una estremità è parzialmente avvolto intorno ad un anello situato su di un piano orizzontale levigato, ed è capace di movimento intorno ad un asse fisso verticale condotto pel suo centro. Se l'anello è inizialmente in quiete e l'elemento è proiettato in una direzione perpendicolare alla lunghezza del filo, e se s è la porzione del filo svolto ad un tempo qualunque t, allora

$$s^2 - b^2 = \frac{\mu}{m+\mu}\,V^2t^2 + 2Vat,$$

dove b è il valore iniziale di s, m e μ sono le masse dell'anello e dell'elemento, a il raggio dell'anello e V la velocità di proiezione.

15. Un quadrato formato di quattro verghe uniformi simili congiunte liberamente nelle loro estremità giace su di una tavola orizzontale levigata, uno dei suoi vertici essendo fisso: se ai due lati che contengono quest'angolo si comunicano nel piano della tavola le velocità angolari ω, ω', mostrare che il massimo

valore dell'angolo (2α) tra essi è dato dall'equazione

$$\cos 2\alpha = -\frac{5}{6}\frac{(\omega-\omega')^2}{\omega^2+\omega'^2}.$$

16. Due elementi di masse m, m' che giacciono sopra una tavola orizzontale levigata sono connessi da un filo inelastico disteso sino alla sua intera lunghezza e che passa per un piccolo anello sulla tavola. Gli elementi sono alle distanze a, a' dall'anello e sono proiettati con velocità v, v' ad angoli retti al filo. Dimostrare che se $mv^2a^2=m'v'^2a'^2$, le loro seconde distanze apsidali dall'anello saranno a', a rispettivamente.

17. Se una sottile verga uniforme PQ si muove in conseguenza di un impulso primitivo tra due curve levigate nello stesso piano, dimostrare che il quadrato della velocità angolare varia inversamente come la differenza tra la somma dei quadrati delle normali OP, OQ alle curve nelle estremità delle verghe, e $\frac{5}{12}$ del quadrato dell'intera lunghezza della verga.

18. Una pallina può scorrere liberamente lungo una spirale equiangola di eguale massa che può girare liberamente intorno al suo polo come un punto fisso. Un centro di forza ripulsiva F è situato nel polo ed agisce sull'elemento. Se il sistema parte dalla quiete quando l'elemento è ad una distanza a, mostrare che la velocità angolare della spirale quando l'elemento è ad una distanza k dal polo è $\sqrt{\frac{\int_a^k F\,dr}{mk^2}}$ dove mk^2 è il momento d'inerzia della spirale rispetto al suo polo.

19. Le estremità di una trave uniforme di lunghezza $2a$, scorrono sopra due sottili verghe senza inerzia, il piano delle verghe essendo verticale, il loro punto d'intersezione fisso e le verghe inclinate all'orizzonte sotto gli angoli $\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$. Il sistema è messo in rotazione intorno alla linea verticale condotta pel punto d'intersezione delle verghe con una velocità angolare ω; dimostrare che se θ è l'inclinazione della trave alla verticale al tempo t ed α il valore iniziale di θ

$$4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{(3\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)^2}{3\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}\,\omega^2=(3\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)\,\omega^2$$
$$+\frac{6g}{a}(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\theta).$$

CAPITOLO VIII.

Piccole Oscillazioni.

144. Quando un sistema di corpi è suscettibile di un solo movimento indipendente, e fa piccole oscillazioni intorno ad una posizione media, si cerca in generale di ridurre le equazioni del moto alla forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = c\,,$$

dove x è una piccola quantità che determina la posizione del sistema al tempo t, ed a, b, c sono costanti. Questa riduzione si effettua trascurando i quadrati della piccola quantità x. L'integrale di questa equazione si sa essere

$$x = \frac{c}{b} + Ae^{-\frac{at}{2}} \operatorname{sen}\left\{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\,t + B\right\},$$

dove A e B sono due costanti indeterminate che dipendono dalle condizioni iniziali del moto. L'interpetrazione fisica di questa equazione non è difficile. Essa rappresenta un movimento oscillatorio, ed il periodo di una completa oscillazione è $\dfrac{2\pi}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}$.

La posizione centrale intorno alla quale il sistema oscilla è determinata da $x = \frac{c}{b}$. L'estensione dell'oscillazione da ciascuna parte di questa posizione centrale è determinata da $x = \frac{c}{b} \pm Ae^{-\frac{at}{2}}$, e dipende dalle condizioni iniziali. Se a è positiva l'ampiezza delle oscillazioni decresce continuamente e gli archi susseguenti saranno in progressione geometrica. Se $b - \frac{a^2}{4}$ è negativa, il seno deve essere rimpiazzato dal suo valore esponenziale, e l'integrale diviene

$$x = \frac{c}{b} + A'e^{\left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)t} + B'e^{\left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)t},$$

dove A', B' sono due costanti indeterminate. Il movimento ora non è più oscillatorio. Se $b - \frac{a^2}{4} = 0$, l'integrale prende una forma diversa ed abbiamo

$$x = \frac{c}{b} + (A''t + B'')e^{-\frac{at}{2}},$$

dove A'', B'' sono due costanti indeterminate.

In tutti questi casi, eccetto quello in cui a e $b - \frac{a^2}{4}$ sono tutte e due positive, la grandezza di x crescerà continuamente. I termini dipendenti da x^2 che sono stati trascurati nel formare l'equazione diverranno allora grandi. È possibile che essi alterino l'intero carattere del movimento. In tali casi l'equilibrio del corpo si dice instabile, e queste equazioni possono rappresentare solamente la natura del movimento col quale il sistema *incomincia* a muoversi dal suo stato di quiete.

Primo Metodo.

145. Quando il sistema che si considera consiste di un solo corpo, vi è un metodo semplice per formare l'equazione del moto il quale è alle volte di grande uso.

Si è mostrato nell'Art. 76, che se trascuriamo i quadrati delle piccole quantità possiamo prendere i momenti rispetto al centro istantaneo come un centro fisso. Ordinariamente le reazioni ignote saranno tali che le loro linee di azione passeranno per questo punto, i loro momenti saranno quindi zero e così avremo un'equazione che contiene solamente quantità note.

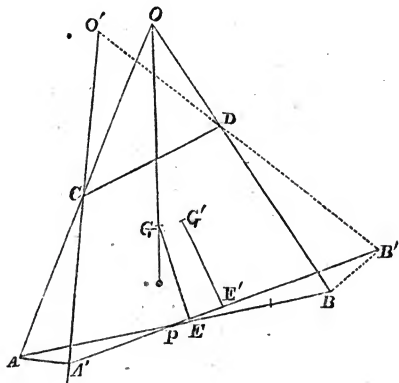
Poichè si suppone che il corpo per il momento giri intorno al centro istantaneo come un punto fisso, la direzione del movimento di un punto qualunque del corpo è perpendicolare alla linea retta che lo congiunge al centro. Viceversa quando le direzioni del movimento di due punti del corpo sono conosciute, si può trovare la posizione del centro istantaneo. Infatti se tiriamo in questi punti le perpendicolari alle loro direzioni del moto, queste perpendicolari si debbono incontrare nel centro istantaneo di rotazione.

146. Es. *Due punti* A, B *di un corpo sono costretti a descrivere curve date, ed il corpo è in equilibrio sotto l'azione della gravità. Essendo dato un piccolo spostamento, trovare il tempo di una oscillazione.*

Siano C, D i centri di curvatura delle curve date nei due punti A, $B \cdot AC$, BD s'incontrino in O. Sia G il centro di gravità del corpo, GE perpendicolare ad AB. Allora nella posizione di equilibrio OG è verticale. Siano i, j gli angoli che CA, BD fanno con la verticale, e sia α l'angolo AOB.

Dinotino A', B', ... le posizioni di A, B ... quando il corpo ha girato per un angolo θ. Sia $ACA' = \varphi$, $BDB' = \varphi'$. Poichè il corpo può passare dalla posizione AB nella posizione $A'B'$ girando intorno ad O per un angolo θ, abbiamo

$$\frac{CA \cdot \varphi}{OA} = \frac{BD \cdot \varphi'}{OB} = \theta$$

Inoltre GG' è ultimamente perpendicolare ad OG, ed abbiamo $GG' = OG \cdot \theta$.

Siano x, y le proiezioni di OO' sull'orizzontale e sulla verticale che passano per O. Allora per le proiezioni

$$\begin{aligned} x \cos j + y \operatorname{sen} j &= \text{distanza di } O' \text{ da } OD \\ &= OD \cdot \varphi', \\ x \cos i - y \operatorname{sen} i &= \text{distanza di } O' \text{ da } OC \\ &= OC \cdot \varphi; \end{aligned}$$

onde
$$x = \frac{OD \operatorname{sen} i \cdot \varphi' + OC \cdot \operatorname{sen} j \cdot \varphi}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Ora prendendo i momenti rispetto ad O' come centro d'istantanea rotazione, abbiamo

$$(k^2 + OG^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g(GG' + x)$$

$$= -g\theta\left(OG + \frac{OD \cdot OB}{BD} \cdot \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{OC \cdot OA}{CA} \cdot \frac{\operatorname{sen} j}{\operatorname{sen} \alpha}\right),$$

dove k è il raggio di girazione rispetto al centro di gravità.

Quindi se L è la lunghezza del pendolo semplice equivalente, abbiamo

$$\frac{k^2 + OG^2}{L} = OG + \frac{OD \cdot OB}{BD} \cdot \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{OC \cdot OA}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} j}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

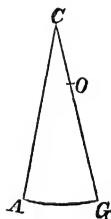
Cor. Se le curve date, sulle quali i punti A, B sono costretti a muoversi, sono linee rette, i centri di curvatura C e D sono all'infinito. In questo caso, possiamo porre $\frac{OD}{BD} = -1$, $\frac{OC}{AC} = -1$, e l'espressione diviene

$$\frac{k^2 + OG^2}{L} = OG - OB \cdot \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} \alpha} - OA \cdot \frac{\operatorname{sen} j}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Se OA ed OB sono ad angoli retti, questa prende la forma semplice

$$\frac{k^2 + OG^2}{L} = OG - 2\,OF,$$

dove F è la proiezione su di OG del punto medio di AB.

147. Quando il corpo è suscettibile di un solo movimento indipendente, il problema di trovare il tempo di una piccola oscillazione è realmente lo stesso di quello di trovare il raggio di curvatura della traiettoria del centro di gravità.

Sia A la posizione del centro di gravità del corpo quando esso è nella sua posizione di equilibrio, G la posizione del centro di gravità al tempo t. Allora poichè nell'equilibrio l'altezza del centro di gravità è un massimo o un minimo, la tangente in A alla curva AG è orizzontale. La normale GC alla curva in G incontri in C la normale alla curva in A. Allora quando l'oscillazione diviene infinitamente piccola C è il centro di curvatura

della curva in A. Sia $AG=s$, l'angolo $ACG=\psi$, e sia R il raggio di curvatura della curva in A.

Sia θ l'angolo percorso dal corpo nel passare dalla posizione di equilibrio nella posizione in cui il centro di gravità è in G; allora $\frac{d\theta}{dt}$ è la velocità angolare del corpo. Poichè G si muove secondo la tangente in G, il centro d'istantanea rotazione giace nella normale GC, in un punto O tale, che $OG\frac{d\theta}{dt}$=vel. di $G=\frac{ds}{dt}$, onde $GO=\frac{ds}{d\theta}$.

Sia Mk^2 il momento d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di gravità, allora prendendo i momenti rispetto ad O, abbiamo

$$(k^2+OG^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\cdot OG \operatorname{sen}\psi.$$

Ora ultimamente quando l'angolo θ è infinitamente piccolo $\frac{\psi}{\theta}=\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{OG}{R}$; quindi l'equazione del moto diviene

$$(k^2+OG^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\cdot\frac{OG^2}{R}\cdot\theta.$$

Quindi se L è la lunghezza del pendolo semplice equivalente abbiamo

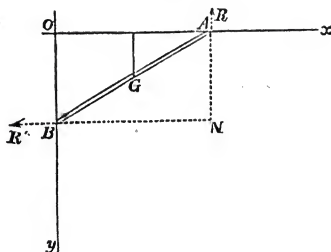
$$L=\left(1+\frac{k^2}{OG^2}\right)R.$$

Secondo Metodo.

148. Siano formate le equazioni generali del movimento di tutti i corpi. Se si conosce la posizione intorno alla quale il sistema oscilla, alcune delle quantità che si considerano saranno piccole. I quadrati e le potenze superiori di queste si possono trascurare, e tutte le equazioni diverranno lineari. Se allora le reazioni ignote si eliminano le equazioni risultanti si possono risolvere facilmente.

Se la posizione intorno alla quale il sistema oscilla è ignota, non è necessario di risolvere prima il problema statico. Possiamo con un procedimento determinare le posizioni di quiete, riconoscere se esse sono statiche o no, e trovare il tempo dell'oscillazione. Il modo di procedere sarà meglio compreso con un esempio.

149. Es. 1. *Gli estremi di una verga pesante uniforme* AB *di lunghezza* 2l *sono costretti a muoversi, l'uno secondo una linea orizzontale* Ox, *e l'altro secondo una linea verticale* Oy. *Se l'intero sistema gira intorno ad* Oy *con una velocità angolare uniforme* ω, *si cerca di trovare le posizioni di equilibrio ed il tempo di una piccola oscillazione.*

Siano x, y le coordinate di G il punto medio della verga, θ l'angolo OAB che la verga fa con Ox. Siano R, R' le reazioni in A e B risolute nel piano xOy.

Le accelerazioni di un elemento qualunque dr della verga di coordinate (ξ, η) sono $\frac{d^2\xi}{dt^2} - \omega^2\xi$ parallela ad Ox, $\frac{1}{\xi}\frac{d}{dt}(\xi^2\omega)$ perpendicolare al piano xOy e $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ parallela ad Oy.

Come non sarà necessario di prendere i momenti rispetto ad Ox, Oy, o di risolvere perpendicolarmente al piano xOy, la seconda accelerazione non sarà richiesta. Le risultanti delle forze effettive $\frac{d^2\xi}{dt^2}dr$ e $\frac{d^2\eta}{dt^2}dr$, prese per tutto il corpo, sono $2l\frac{d^2x}{dt^2}$ e $2l\frac{d^2y}{dt^2}$ che agiscono in G, ed una coppia $2lk^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$ che tende a girare il corpo intorno a G. La risultante delle forze effettive $\omega^2\xi dr$ prese per tutto il corpo è una sola forza che agisce in G

$$= \int_{-l}^{+l} \omega^2 (x + r\cos\theta)\, dr = \omega^2 x \cdot 2l,$$

ed una coppia rispetto a G

$$= \int_{-l}^{+l} \omega^2 (x + r\cos\theta)\, r \operatorname{sen}\theta\, dr = \omega^2 \cdot 2l \cdot \frac{l^2}{3} \operatorname{sen}\theta \cos\theta,$$

la distanza r essendo misurata da G verso A.

Allora abbiamo, risolvendo secondo Ox, Oy, e prendendo i momenti rispetto a G, le *equazioni dinamiche*

$$\left.\begin{aligned} 2l\cdot\frac{d^2x}{dt^2} &= -R' + \omega^2 x\cdot 2l \\ 2l\cdot\frac{d^2y}{dt^2} &= -R + g\cdot 2l \\ 2l\cdot k^2\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} &= Rx - R'y - \omega^2\cdot 2l\cdot\frac{l^2}{3}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \end{aligned}\right\}\;..\;(1).$$

Abbiamo ancora le *equazioni geometriche*

$$\left.\begin{aligned} x &= l\cos\theta \\ y &= l\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2).$$

Eliminando R, R' dalle equazioni (1), otteniamo

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = gx - \omega^2 xy - \omega^2\frac{l^2}{3}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\;..\;(3).$$

Trovare la posizione di quiete.

Osserviamo che se la verga fosse situata in quella posizione vi rimarrebbe sempre, e che perciò $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$. Questo dà

$$gx - \omega^2 xy - \omega^2\frac{l^2}{3}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0\;\ldots\ldots\ldots\;(4).$$

Unendo questa con le equazioni (2), otteniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$, o $\text{sen}\,\theta = \frac{3g}{4\omega^2 l}$, e così si trovano le posizioni di equilibrio. Una qualunque di queste posizioni sia rappresentata da $\theta = \alpha$, $x = a$, $y = b$.

Trovare il movimento di oscillazione.

Sia $x = a + x'$, $y = b + y'$, $\theta = \alpha + \theta'$, dove x', y', θ' sono tutte piccole quantità, allora dobbiamo sostituire questi valori nell'equazione (3). Nel primo membro poichè $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, sono piccole quantità, dobbiamo scrivere semplicemente a, b, α, per x, y, θ. Nel secondo membro la sostituzione deve essere fatta col Teorema di Taylor, così

$$f(a + x',\; b + y',\; \alpha + \theta') = \frac{df}{da}x' + \frac{df}{db}y' + \frac{df}{d\alpha}\theta'.$$

Sappiamo che il primo termine $f(a, b, \alpha)$ sarà eguale a zero, a motivo dell'equazione (4) da cui furono trovate a, b, α. Abbiamo perciò

$$a\frac{d^2y'}{dt^2} - b\frac{d^2x'}{dt^2} + k^2\frac{d^2\theta'}{dt^2} = (g - \omega^2 b)\, x' - \omega^2 a y' - \omega^2 \frac{l^2}{3}\cos 2\alpha \cdot \theta'.$$

Ma ponendo $\theta = \alpha + \theta'$ nelle equazioni (2), otteniamo pel Teorema di Taylor $x' = -l \operatorname{sen}\alpha \cdot \theta'$, $y' = l \cos\alpha \cdot \theta'$.

Quindi l'equazione per determinare il moto è

$$(l^2 + k^2)\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \left(gl \operatorname{sen}\alpha + \frac{4}{3}\,\omega^2 l^2 \cos 2\alpha\right)\theta' = 0.$$

Ora, se $gl \operatorname{sen}\alpha + \frac{4}{3}\,\omega^2 l^2 \cos 2\alpha = n$ è positiva quando si sostituisce ciascuno dei due valori di α, quella posizione di equilibrio è *stabile*, ed il tempo di una piccola oscillazione è

$$2\pi\sqrt{\frac{l^2 + k^2}{n}}.$$

Se n è negativa l'equilibrio è *instabile*, e non vi può essere oscillazione.

Se $\omega^2 > \frac{3g}{4l}$ vi sono due posizioni di equilibrio della verga. Si troverà con la sostituzione che la posizione in cui la verga è inclinata alla verticale è stabile, e l'altra posizione instabile. Se $\omega^2 < \frac{3g}{4l}$ la sola posizione in cui la verga può stare in equilibrio è verticale, e questa posizione è stabile.

Se $n = 0$, il corpo è in una posizione di equilibrio neutro. Per determinare le piccole oscillazioni dobbiamo ritenere i termini di un ordine superiore al primo. Per una conosciuta trasformazione abbiamo

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Quindi il primo membro dell'equazione (3) diviene $(l^2 + k^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Il secondo membro pel Teorema di Taylor diviene

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(gl\cos\alpha - \frac{2}{3}\,\omega^2 l^2 \operatorname{sen} 2\alpha\right)\frac{\theta'^2}{1\cdot 2} + \text{etc.}$$

Quando $n=0$, abbiamo $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ed $\omega^2=\frac{3g}{4l}$. Facendo le necessarie sostituzioni l'equazione del moto diviene

$$(l^2+k^2)\frac{d^2\theta'}{dt^2}=-\frac{gl}{2}\theta'^3.$$

Siccome la più bassa potenza di θ' nel secondo membro è dispari ed il suo coefficiente negativo, l'equilibrio è stabile per uno spostamento da ciascun lato della posizione di equilibrio. Sia α il valore iniziale di θ', allora il tempo T per giungere alla posizione di equilibrio è

$$T=\sqrt{\frac{4(l^2+k^2)}{gl}}\int_0^\alpha\frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha^4-\theta'^4}},$$

si ponga $\theta'=\alpha\varphi$, allora

$$T=\sqrt{\frac{4(l^2+k^2)}{gl}}\int_0^1\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^4}}\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

Quindi il tempo per giungere alla posizione di equilibrio varia inversamente come l'arco. Quando lo spostamento iniziale è infinitamente piccolo, il tempo diviene infinito.

150. Questo problema si potrebbe risolvere facilmente col primo metodo. Infatti se le due perpendicolari ad Ox, Oy in A e B s'incontrano in N, N è l'asse istantaneo. Prendendo i momenti rispetto ad N, abbiamo l'equazione

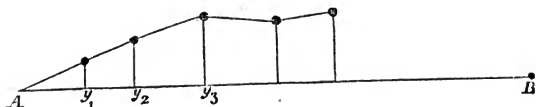
$$\begin{aligned}(l^2+k^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}&=gl\cos\theta-\int_{-l}^{+l}\omega^2(l+r)^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{dr}{2l}\\&=gl\cos\theta-\frac{4l^2}{3}\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\&=f(\theta).\end{aligned}$$

Allora le posizioni di equilibrio si possono trovare dall'equazione

$$f(\alpha)=0,$$

ed il tempo dell'oscillazione dall'equazione

$$(l^2+k^2)\frac{d^2\theta'}{dt^2}=\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\cdot\theta'.$$

151. Es. 2. *Un filo di lunghezza* $(n+1)l$, *e di massa insensibile, disteso tra due punti fissi con una forza* T, *è caricato ad intervalli* l *con* n *masse eguali* m, *non soggette all'influenza della gravità, ed è leggermente spostato; se* $\frac{T}{lm}=c^2$, *dimostrare che i tempi periodici delle vibrazioni transversali semplici che in generale coesistono sono dati dalla formola* $\frac{\pi}{c}\operatorname{cosec}\left(\frac{i}{n+1}\frac{\pi}{2}\right)$ *ponendo successivamente* $i=1, 2, 3\dots n$.

Siano A, B i punti fissi; $y_1, y_2, \dots y_n$ le coordinate al tempo t degli n elementi.

Il moto degli elementi parallelo ad AB è di secondo ordine, e quindi le tensioni di tutt' i fili debbono essere eguali, e nei piccoli termini possiamo porre questa tensione eguale a T.

Si consideri il moto dell' elemento la di cui ordinata è y_k. L'equazione del moto è

$$m\frac{d^2y_k}{dt^2}=\frac{y_{k+1}-y_k}{l}T-\frac{y_k-y_{k-1}}{l}T;$$

onde
$$\frac{d^2y_k}{dt^2}=c^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}).$$

Ora il moto di ciascun elemento è vibratorio, possiamo perciò sviluppare y_k in una serie della forma

$$y_k=\Sigma L\operatorname{sen}(pt+\alpha).$$

Siccome vi può essere un termine dell' argomento pt in ogni y, siano $L_1, L_2, \dots$ i loro coefficienti rispettivi. Allora sostituendo, abbiamo

$$L_{k+1}-2L_k+L_{k-1}=-\frac{p^2}{c^2}L.$$

Per risolvere questa, si ponga $L_k=a^kL$, abbiamo

$$a-2+\frac{1}{a}=-\left(\frac{p}{c}\right)^2,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{o} & \sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{p}{c}\sqrt{-1} \\ \text{e} & \sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \pm 2\sqrt{1-\left(\dfrac{p}{2c}\right)^2} \end{array}\right\};$$

onde
$$\sqrt{a} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{p}{2c}\right)^2} + \frac{p}{2c}\sqrt{-1}.$$

Si chiamino queste radici a_1 ed a_2, allora abbiamo

$$L_k = Aa_1{}^k + Ba_2{}^k;$$

onde
$$y_k = \Sigma\left[Aa_1{}^k + Ba_2{}^k\right]\operatorname{sen}(pt+\alpha).$$

Ora $y=0$ quando $k=0$ per *tutt'* i valori di t, quindi ogni termine della serie deve svanire; onde

$$A + B = 0.$$

Inoltre $y=0$ quando $k=n+1$ per tutt' i valori di t; quindi

$$Aa_1{}^{n+1} + Ba_2{}^{n+1} = 0.$$

Queste equazioni danno con la divisione $a_1{}^{n+1} = a_2{}^{n+1}$. Ma se $\frac{p}{2c} > 1$, il rapporto di a_1 ad a_2 è reale e diverso dall' unità. Quindi dobbiamo avere $\frac{p}{2c} < 1$. Sia allora $\frac{p}{2c} = \operatorname{sen}\theta$; onde

$$a = \cos 2\theta \pm \operatorname{sen} 2\theta\sqrt{-1}.$$

Quindi, per quello che si è dimostrato prima,

$$(\cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta\sqrt{-1})^{n+1} = (\cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta\sqrt{-1})^{n+1};$$

onde
$$\operatorname{sen} 2(n+1)\theta = 0;$$

$$2(n+1)\theta = i\pi;$$

$$\theta = \frac{i}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$\frac{p}{2c} = \operatorname{sen}\frac{i}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2};$$

ed il periodo di ogni termine $= \dfrac{2\pi}{p}$.

Se m ed l sono infinitamente piccole ed n infinitamente grande, il filo caricato si può riguardare come un filo uniforme di lunghezza $(n+1)l=L$ e di massa $nm=M$ disteso tra due punti fissi con una tensione T. In questo caso l'espressione ora trovata si riduce a

$$p=\pi i\sqrt{\frac{T}{ML}}.$$

Terzo Metodo.

152. Quando il sistema di corpi in moto è suscettibile di un solo movimento indipendente, il tempo di una piccola oscillazione si può dedurre frequentemente dall'equazione della Forza Viva. Questa equazione sarà di secondo ordine nelle piccole quantità, e nel formare l'equazione sarà necessario di prendere in considerazione le piccole quantità di quell'ordine. Ciò porterà talvolta a considerazioni piuttosto incomode. Da un'altra parte l'equazione sarà libera da tutte le reazioni ignote, e possiamo così frequentemente evitare di molto l'eliminazione.

Il modo di procedere si renderà chiaro con l'esempio seguente, e potrà paragonarsi col metodo dell'Art. 147.

Il movimento di un corpo nello spazio di due dimensioni è dato dalle coordinate x, y *del suo centro di gravità, e dall'angolo* θ *che una linea fissa qualunque nel corpo fa con una linea fissa nello spazio. Il corpo essendo in equilibrio sotto l'azione della gravità si cerca di trovare il tempo di una piccola oscillazione.*

Poichè il corpo è suscettibile di un solo movimento indipendente, possiamo esprimere (x, y) come funzioni di θ, così

$$x=F(\theta),\quad y=f(\theta).$$

Sia Mk^2 il momento d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di gravità, allora l'equazione delle Forza Viva diviene

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+k^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g\,(y_0-y),$$

dove y_0 è l'altezza del centro di gravità nella posizione di equilibrio.

Sia α il valore di θ quando il corpo è nella posizione di equilibrio, e supponiamo che al tempo t, $\theta=\alpha+\varphi$. Allora, pel teorema di Mac Laurin,

$$y=y_0+y_0'\varphi+y_0''\frac{\varphi^2}{2}+\cdots,$$

dove y_0', y_0'' sono i valori di $\frac{dy}{d\theta}$, $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ quando $\theta=\alpha$. Ma nella posizione di equilibrio y è un massimo o minimo; onde $y_0'=0$. Quindi l'equazione della Forza Viva diviene

$$(x_0'^2+k^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-gy_0''\varphi^2,$$

dove x_0' è il valore di $\frac{dx}{d\theta}$ quando $\theta=\alpha$; differenziando otteniamo

$$(x_0'^2+k^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-gy_0''\varphi.$$

Se L è la lunghezza del pendolo semplice equivalente, abbiamo

$$L=\frac{k^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}{\frac{d^2y}{d\theta^2}},$$

dove per θ dobbiamo scrivere il suo valore α dopo che le differenziazioni sono state effettuate. Non è difficile di vedere che il significato geometrico di questo risultato è lo stesso di quello dato nell'Art. 147.

Precisamente nello stesso modo possiamo dedurre una formola per la lunghezza del pendolo equivalente nel caso di un corpo che si muove nello spazio di tre dimensioni.

Oscillazioni di Secondo Ordine.

153. Quando le oscillazioni di un sistema sono molto piccole sarà generalmente un'approssimazione sufficiente il trascurare i quadrati delle piccole quantità che determinano il cambiamento di posizione del sistema. Ma vi sono dei casi in cui è necessario di procedere ad una seconda approssimazione. Considereremo qui il metodo più comune di approssimazione.

Per rendere la spiegazione più chiara supponiamo che il sistema sia suscettibile di un solo movimento indipendente, sicchè la sua posizione si possa far dipendere da una sola piccola quantità x. Supponiamo che l'equazione del moto sia

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=c+\varphi\left(x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\dots\right)\dots\dots(1),$$

in cui tutte le quantità del primo ordine sono state riunite in-

sieme nel primo membro, e quelle del secondo e degli ordini superiori formano collettivamente la funzione φ.

Come una prima approssimazione trascuriamo la piccola funzione φ, ed integrando l'equazione abbiamo

$$x = \frac{c}{b} + e^{-\frac{at}{2}}\left(A \operatorname{sen}\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\, t + B \cos\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\, t\right) \dots (2).$$

Per ottenere una seconda approssimazione sostituiamo questo valore di x nei termini nel secondo membro dell'equazione.

Per facilitare l'integrazione della nuova equazione differenziale così formata, sarà necessario di sviluppare le potenze dei seni e coseni che possono incontrarsi nella sostituzione in una serie di seni e coseni di angoli multipli. Questo si può effettuare con le formole date nelle opere di Trigonometria. L'equazione prenderà allora la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = \Sigma F \cdot e^{pt} \operatorname{sen}(qt + f) \dots\dots\dots (3),$$

dove F, p, q, f sono quantità date dallo sviluppo e p deve essere negativa se le oscillazioni debbono rimanere piccole.

Ciascun termine nel secondo membro dell'equazione dà un termine corrispondente nello sviluppo di x. Per trovare il termine corrispondente ad un determinato termine procediamo così. L'operazione $\frac{d}{dx}$ si dinoti con D, allora

$$x = \frac{1}{D^2 + aD + b} Fe^{pt} \operatorname{sen}(qt + f)$$

$$= Fe^{pt} \frac{1}{(D+p)^2 + a(D+p) + b} \operatorname{sen}(qt + f)$$

pel noto teorema del Calcolo Differenziale

$$f(D)\, e^{pt} f(t) = e^{pt} f(D+p)\, f(t).$$

Ponendo

$$a' = 2p + a \quad \text{e} \quad b' = p^2 + ap + b,$$

questo si può scrivere

$$x = F \cdot e^{pt} \cdot \frac{1}{D^2 + a'D + b'} \operatorname{sen}(qt + f)$$

$$= F \cdot e^{pt} \cdot \frac{D^2 + b' - a'D}{(D^2 + b')^2 - a'^2 D^2} \operatorname{sen}(qt + f).$$

Ora per un altro teorema del Calcolo Differenziale

$$\psi(D^2)\,\text{sen}\,qt = \psi(-q^2)\,\text{sen}\,qt\,,$$

onde $$x = F\cdot e^{pt}\cdot\frac{(-q^2+b')\,\text{sen}\,(qt+f) - a'q\cos(qt+f)}{(-q^2+b')^2+a'^2q^2}\,,$$

che si può scrivere per brevità

$$x = e^{pt}\{L\,\text{sen}\,(qt+f) + M\cos(qt+f)\}.$$

Così il completo valore di x è

$$x = \frac{c}{b} + e^{-\frac{at}{2}}\left\{A\,\text{sen}\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t + B\cos\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\,t\right\}$$

$$+\,\Sigma e^{pt}\{L\,\text{sen}\,(qt+f) + M\cos(qt+f)\}\ \ldots\ldots\ (4).$$

In questa espressione A e B sono due costanti arbitrarie; e, determinandole con le condizioni iniziali, è chiaro che i loro valori usando i primi e i secondi valori approssimati di x possono essere differenti. Questa differenza sarà piccola, essendo dell'ordine dei termini L, M. Ma siccome essa non può essere trascurata, sarà necessario o di applicare le correzioni ai valori di A e B determinati dai primi valori approssimati di x, o di tenere A e B indeterminate finchè si trovi la forma del valore completo di x.

154. Vi sono due casi nell'investigazione precedente che meritano particolare osservazione.

Primo. Se un corpo è sollecitato da diverse forze, ciascuna che tende a produrre movimenti oscillatorii, gli effetti di queste forze non sono necessariamente proporzionali alle loro grandezze rispettive. Ciascuna forza isolata produrrà termini della forma rappresentata nel secondo membro dell'equazione differenziale (3). La forza può essere tale che il coefficiente F sia piccolo, però se i denominatori delle espressioni di L, M sono piccoli, questa forza può produrre un effetto molto grande sul valore di x. Così nel formare la nostra equazione differenziale esatta sino al secondo ordine, dobbiamo includere in essa tutti i termini della terza potenza ed anche delle potenze superiori di x, i quali sono tali che i coefficienti di t nell'esponente (cioè p) e nell'arco (cioè q) siano rispettivamente eguali prossimamente a $-\frac{a}{2}$ e $\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$. Il procedimento di approssimazione è perciò alquanto

per tentativi. Se in uno stadio qualunque della nostra approssimazione si introduce un termine molto più grande di quelli in paragone dei quali esso era stato già trascurato, dobbiamo rivedere il nostro intero procedimento ed includere questi termini addizionali nella nostra approssimazione in uno stadio precedente.

In secondo luogo. È possibile che un termine nell'equazione differenziale (3) sia tale che risolvendola nel modo sopra indicato si trovi $a'=0$, $b'=q^2$. Il valore di x è allora infinito. Questo indica che l'espressione di x cambia il suo carattere. Seguendo le regole date nelle opere sulle Equazioni Differenziali, troviamo

$$x = e^{pt} \cdot t\,(L \operatorname{sen} qt + M \cos qt) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5),$$

così il valore di x contenendo un fattore proporzionale al tempo può divenire molto grande. Questo generalmente si troverà aver luogo quando il corpo è sollecitato da una piccola forza il cui periodo è tale che o spinge sempre il corpo nella direzione nella quale, secondo la prima approssimazione, esso allora si muove, o sempre nella direzione opposta. Il moto così prodotto si accumula continuamente, e la nostra prima approssimazione cessa subito dal dare una esatta rappresentazione del movimento.

L'effetto di questa piccola forza può essere ultimamente di distruggere tutte le piccole oscillazioni qualunque, ma questo non è necessariamente il caso. Essa può solamente così alterare il carattere del movimento che la nostra prima approssimazione non sia sufficientemente vicina alla verità in modo da servire come base per una serie di approssimazioni. Dobbiamo perciò correggere la nostra prima approssimazione includendovi l'effetto di questa piccola forza.

Supponiamo che nel formare la nostra equazione differenziale (3) si trovi un termine della forma

$$e^{-\frac{at}{2}}(F \operatorname{sen} \beta t + G \cos \beta t) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6),$$

dove $\beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$. In questo caso troviamo L ed M infinite. Alteriamo allora il nostro primo valore approssimato di x dato in (2) in

$$x = \frac{c}{b} + e^{rt}\left\{A \operatorname{sen} st + B \cos st\right\} \;\ldots\ldots\ldots\; (7).$$

Allora ripetendo il nostro procedimento, incominciando con

questo valore di x, *possiamo* trovare come nostra equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = c + e^{rt}(F \operatorname{sen} st + G \cos st) \ldots (S),$$

dove F e G sono funzioni note di A e B. Qui i termini nel secondo membro sono quelli che diverrebbero (6) se poniamo $r = -\frac{a}{2}$, $s = \beta$. Allora r ed s si debbono, se è possibile, scegliere in modo che il valore di x dato da (7) soddisfi a questa equazione differenziale.

Sostituendo ed eguagliando i coefficienti di sen st e cos st, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} A(r^2 + ar + b - s^2) - B(2r + a)s &= F \\ A(2r + a)s + B(r^2 + ar + b - s^2) &= G \end{aligned}\right\}.$$

In queste equazioni A e B si debbono lasciare arbitrarie, essendo dipendenti dalle condizioni iniziali, mentre r ed s sono a nostra disposizione. Ora F e G sono piccole quantità del secondo ordine almeno. Se esse fossero zero, avremmo per ipotesi $r = -\frac{a}{2}$ ed $s = \beta$, dove $\beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$. Poniamo quindi $r = -\frac{a}{2} + \rho$, $s = \beta + \sigma$.

In molti casi sarà sufficiente di trascurare i quadrati di ρ e σ: sostituendo otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{2\beta} \cdot \frac{FB - GA}{A^2 + B^2} \\ \sigma &= -\frac{1}{2\beta} \cdot \frac{FA + GB}{A^2 + B^2} \end{aligned}\right\}.$$

Introducendo questi valori di r ed s nell'equazione (7), otteniamo la forma conveniente della nostra prima approssimazione.

Si deve osservare che ρ non svanisce necessariamente quando a svanisce. Sicchè anche se il secondo membro dell'equazione non presenti alcuna esponenziale, può essere necessario di introdurne una nel valore di x. F, G sono funzioni note di A e B date dal procedimento della sostituzione. Se $\frac{F}{G} = \frac{A}{B}$ non sarà necessario d'introdurre alcuna esponenziale nel valore di x. Così ancora se $\frac{F}{G} = -\frac{B}{A}$, non sarà necessario di alterare il coefficiente di t.

Sostituendo il primo valore approssimato corretto di x dato in (7) nell'equazione differenziale, può accadere che l'equazione non prenda la forma data in (8); sicchè non sia possibile di soddisfare l'equazione col valore di x assunto in (7). Questo indica che si deve prendere un'altra forma come prima approssimazione. Quale questa debba essere dipende dal problema particolare che si considera. I criterii che sia stata scelta la vera forma per una prima approssimazione sono, che essa soddisfi l'equazione sino al primo ordine, e che in nessuno stadio susseguente del nostro procedimento di approssimazione apparisca alcun termine il quale possa diventare tanto grande da fare che il nostro valore assunto per x non sia più una prima approssimazione.

155. Es. *Un pendolo oscilla in un mezzo molto rado, che resiste in parte come la velocità ed in parte come il quadrato della velocità; determinare il movimento.*

Sia θ l'angolo che la congiungente del punto O di sostegno col centro di gravità G del pendolo fa con la verticale. Allora l'equazione del moto è

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = -2\varkappa\frac{d\theta}{dt} - \mu\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

dove l è la lunghezza del pendolo semplice equivalente, $2\varkappa$ e μ sono i coefficienti della resistenza divisi pel momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse di sospensione. Sia $\frac{g}{l} = n^2$.

Poichè θ è piccolo possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = -2\varkappa\frac{d\theta}{dt} - \mu\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + n^2\frac{\theta^3}{6} - \dots$$

Essendo $\varkappa$ e θ molto piccoli, potremmo a prima vista supporre che sia sufficiente di prendere come una prima approssimazione

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = 0.$$

Questo dà $\theta = \alpha\operatorname{sen} nt$, l'origine del tempo essendo scelta in modo che t e θ svaniscano insieme. Se sostituiamo questo nei piccoli termini otteniamo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = -2\varkappa n\cdot\alpha\cos nt + \text{etc.}$$

che dà
$$\theta = \alpha\operatorname{sen} nt - \varkappa\alpha\cdot t\operatorname{sen} nt + \text{etc.}$$

Questo termine addizionale contiene t come fattore, e mostra che la nostra prima approssimazione non era sufficientemente vicina alla verità per rappresentare il movimento salvo che per un piccolo tempo.

Per ottenere una prima approssimazione sufficientemente vicina dobbiamo includere in essa il piccolo termine $2\varkappa\frac{d\theta}{dt}$, abbiamo perciò

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\varkappa\frac{d\theta}{dt}+n^2\theta=0.$$

Questo dà

$$\theta=\alpha e^{-\varkappa t}\cdot\operatorname{sen} mt,$$

dove per brevità si è messo $n^2-\varkappa^2=m^2$.

Nella nostra seconda approssimazione dovremo rigettare tutt'i termini dell'ordine α^3 o $\alpha^2\varkappa$ a meno che essi non siano tali che dopo l'integrazione salgano in importanza nel modo spiegato nell'art. 154. Otteniamo così

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\varkappa\frac{d\theta}{dt}+n^2\theta=-\frac{\mu\alpha^2m^2}{2}e^{-2\varkappa t}(1+\cos 2mt)$$
$$+\frac{n^2}{6}\alpha^3\frac{e^{-3\varkappa t}}{4}(3\operatorname{sen} mt-\operatorname{sen} 3mt)$$
$$-\mu\alpha^2\varkappa e^{-2\varkappa t}\left(-\frac{\varkappa}{2}+\frac{\varkappa}{2}\cos 2mt+m\operatorname{sen} 2mt\right),$$

dove tutt'i termini dopo quelli nella prima linea sono del terzo ordine, e debbono essere rigettati a meno che non salgano in importanza.

Per risolvere ciò, consideriamo prima il caso generale

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\varkappa\frac{d\theta}{dt}+n^2\theta=e^{-p\varkappa t}(A\operatorname{sen} rmt+B\cos rmt).$$

Si ponga $\quad\theta=e^{-p\varkappa t}(L\operatorname{sen} rmt+M\cos rmt).$

Sostituendo otteniamo

$$\left.\begin{aligned}L\{(p-1)^2\varkappa^2+m^2(1-r^2)\}+2(p-1)\varkappa rm M=A\\ M\{(p-1)^2\varkappa^2+m^2(1-r^2)\}-2(p-1)\varkappa rm L=B\end{aligned}\right\}.$$

Ora $\varkappa$ è molto piccolo. Se quindi r non è eguale all'unità, ab-

biamo prossimamente

$$L=\frac{A}{m^2(1-r^2)}, \quad M=\frac{B}{m^2(1-r^2)};$$

ma se $r=1$, abbiamo prossimamente

$$L=\frac{-B}{2(p-1)\varkappa m}, \quad M=\frac{A}{2(p-1)\varkappa m}.$$

Il caso di $p=1$ non s'incontra nel nostro problema.

Si vede che quei termini solamente nell'equazione differenziale che hanno $r=1$ danno origine a termini nel valore di x che hanno la piccola quantità $\varkappa$ nel denominatore. Quindi nell'equazione differenziale il solo termine di terzo ordine che si deve ritenere è il primo.

Troviamo così, ponendo successivamente $r=0$, $r=2$, $r=1$,

$$\theta=\alpha e^{-\varkappa t}\operatorname{sen} mt-\frac{\mu\alpha^2}{2}e^{-2\varkappa t}+\frac{\mu\alpha^2}{6}e^{-2\varkappa t}\cos 2mt+\frac{n^2\alpha^3}{32\varkappa m}e^{-3\varkappa t}\cos mt.$$

Questa equazione determina il movimento solamente durante una oscillazione qualunque del pendolo; quando il pendolo torna indietro μ cambia di segno. Supponiamo che il pendolo si muova da sinistra a dritta, e troviamo le lunghezze degli archi di discesa e di salita. Per fare ciò dobbiamo porre $\frac{d\theta}{dt}=0$. L'equazione sia scritta nella forma $\theta=f(t)$, allora se trascuriamo tutt'i piccoli termini, $\frac{d\theta}{dt}$ svanisce quando $mt=\pm\frac{\pi}{2}$. Si ponga allora $mt=-\frac{\pi}{2}+x$ dove x è una piccola quantità, abbiamo

$$f'(t)=f'\left(-\frac{\pi}{2m}\right)+f''\left(-\frac{\pi}{2m}\right)\frac{x}{m}=0$$

Ora $f'(t)=\alpha e^{-\varkappa t}(m\cos mt-\varkappa\operatorname{sen} mt)$

$$-\frac{\mu\alpha^2}{2}e^{-2\varkappa t}\left(-2\varkappa+\frac{2\varkappa}{3}\cos 2mt+\frac{2m}{3}\operatorname{sen} 2mt\right)$$

$$+\frac{n^2\alpha^3}{32\varkappa m}e^{-3\varkappa t}(-m\operatorname{sen} mt-3\varkappa\cos mt).$$

Un'approssimazione sufficientemente vicina al valore di $f''(t)$

si può trovare differenziando la prima linea del valore di $f'(t)$. Troviamo così

$$x = -\frac{\varkappa}{m} - \frac{4}{3}\frac{\mu\alpha\varkappa}{m} - \frac{n^2\alpha^2}{32\varkappa m};$$

il secondo di questi termini essendo minore degli altri due si può trascurare. Troviamo ancora come arco di discesa

$$0 = f\left(-\frac{\pi}{2m}\right) + f'\left(-\frac{\pi}{2m}\right)\frac{x}{m}$$

$$= -\left[\alpha e^{\frac{\varkappa\pi}{2m}} + \frac{2}{3}\mu\alpha^2 e^{\frac{\varkappa\pi}{m}} - x\left\{\varkappa\alpha e^{\frac{\varkappa\pi}{m}} + \frac{n^2\alpha^3}{32\varkappa m}e^{\frac{3\varkappa\pi}{2m}}\right\}\right].$$

Similmente per trovare l'arco della salita poniamo $mt = \frac{\pi}{2} + y$. Questo dà $y = -\frac{\varkappa}{m} - \frac{n^2\alpha^2}{32\varkappa m}$, e l'arco della salita è

$$0 = \alpha e^{-\frac{\varkappa\pi}{2m}} - \frac{2}{3}\mu\alpha^2 e^{-\frac{\varkappa\pi}{m}} - y\left\{\varkappa\alpha e^{-\frac{\varkappa\pi}{2m}} + \frac{n^2\alpha^3}{32\varkappa m}e^{-\frac{3k\pi}{2m}}\right\}.$$

In queste espressioni degli archi di discesa e di salita i termini che contengono x ed y sono molto piccoli, e supponendo che $\varkappa$ non sia estremamente piccolo, questi termini si trascureranno.

Ora α è differente per ogni oscillazione del pendolo, dobbiamo perciò eliminare α. Siano u_n ed n_{n+1} due archi successivi di discesa e di salita, e sia $\lambda = e^{-\frac{\varkappa\pi}{2m}}$, sicchè λ è un poco minore dell'unità. Allora abbiamo

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \alpha\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{3}\mu\alpha^2\frac{1}{\lambda^2} \\ u_{n+1} &= \alpha\lambda - \frac{2}{3}\mu\alpha^2\lambda^2 \end{aligned}\right\};$$

onde

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} - \lambda^2 u_n &= -\frac{2}{3}\mu\alpha^2(1+\lambda^2) \\ u_n \cdot u_{n+1} &= \alpha^2 + \frac{2}{3}\mu\alpha^3\frac{1-\lambda^2}{\lambda} + \ldots \end{aligned}\right\}.$$

Quindi
$$\frac{1}{u_n} - \frac{\lambda^2}{u_{n+1}} = -\frac{2}{3}\mu(1+\lambda^2).$$

Questa equazione lega gli archi successivi di discesa e di salita. Essa si può scrivere nella forma

$$\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{c}\right),$$

dove $$c=\frac{3}{2\mu}\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}=\frac{3\varkappa\pi}{4\mu m}\text{ prossimamente.}$$

Gli archi successivi sono, perciò, tali che $\frac{1}{u_n}+\frac{1}{c}$ è il termine generale di una serie geometrica di cui la ragione è $e^{\frac{\varkappa\pi}{m}}$. Il rapporto di un arco qualunque u_n all'arco seguente u_{n+1} è

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=e^{\frac{\varkappa\pi}{m}}+\frac{u_n}{c}(e^{\frac{\varkappa\pi}{m}}-1),$$

che continuamente decresce con l'arco. In una serie qualunque di oscillazioni il rapporto è da principio maggiore e poi minore del suo valore medio. Questo risultato sembra essere d'accordo con l'esperimento.

Trovare il tempo dell'oscillazione. Siano t_1, t_2 i tempi nei quali il pendolo è all'estremità sinistra e dritta del suo arco di oscillazione. Allora

$$\left.\begin{aligned} mt_1 &= -\frac{\pi}{2}-\frac{\varkappa}{m}-\frac{n^2\alpha^2}{32m\varkappa} \\ mt_2 &= \frac{\pi}{2}-\frac{\varkappa}{m}-\frac{n^2\alpha^2}{32m\varkappa} \end{aligned}\right\};$$

onde $$\text{tempo}=t_2-t_1=\frac{\pi}{m}.$$

Questo risultato è indipendente dall'arco, sicchè il tempo dell'oscillazione rimane costante durante il moto. Il tempo però non è esattamente lo stesso come nel vuoto, ma è un poco più lungo; la differenza dipendendo dal *quadrato* della piccola quantità $\varkappa$.

ESEMPII.

1. Una verga uniforme di lunghezza $2c$ poggia in equilibrio stabile con la sua estremità inferiore al vertice di una cicloide il di cui piano è verticale ed il vertice in giù, e passa per un piccolo anello fisso levigato situato nell'asse ad una distanza b dal

vertice. Mostrare che se l'equilibrio è leggermente disturbato, la verga eseguirà delle piccole oscillazioni con la sua estremità inferiore sull'arco della cicloide nel tempo $4\pi\sqrt{\frac{a\{c^2+3(b-c)^2\}}{3g(b^2-4ac)}}$, dove $2a$ è la lunghezza dell'asse della cicloide.

2. Un piccolo anello levigato scorre su di un filo metallico circolare di raggio a che è costretto a girare intorno ad un asse verticale nel suo proprio piano, ad una distanza c dal centro dell'anello, con una velocità angolare uniforme $\sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{c\sqrt{2}+a}}$; mostrare che l'anello sarà in una posizione di equilibrio relativo stabile quando il raggio del filo metallico circolare che passa per esso è inclinato sotto un angolo di 45° all'orizzonte; e che se l'anello è leggermente spostato, esso eseguirà una piccola oscillazione nel tempo

$$2\pi\left\{\frac{a\sqrt{2}}{g}\cdot\frac{c\sqrt{2}+a}{c\sqrt{8}+a}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

3. Una sbarra uniforme di lunghezza $2a$ sospesa per mezzo di due fili paralleli eguali ciascuno di lunghezza $2b$ da due punti nella stessa linea orizzontale, gira per un piccolo angolo intorno alla linea verticale condotta pel punto medio; mostrare che il tempo di una piccola oscillazione è $2\pi\sqrt{\frac{bk^2}{ga^2}}$.

4. L'estremità superiore di una trave uniforme di lunghezza $2a$ è costretta a scorrere sopra una verga orizzontale levigata senza inerzia, e l'inferiore lungo una verga verticale levigata per l'estremità superiore della quale passa la verga orizzontale: il sistema gira liberamente intorno alla verga verticale, dimostrare che se α è l'inclinazione della trave alla verticale nella posizione di equilibrio relativo, la velocità angolare del sistema sarà $\left(\frac{3g}{4a\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, e se la trave è leggermente spostata da questa posizione mostrare che essa farà una piccola oscillazione nel tempo

$$\frac{4\pi}{\left\{\frac{3g}{a}(\sec\alpha+3\cos\alpha)\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

5. Due verghe eguali pesanti connesse da un ganghero che permette loro di muoversi in un piano verticale girano unifor-

memente intorno ad un asse verticale condotto pel ganghero, ed una fune la di cui lunghezza è due volte quella di ciascuna verga è legata alle loro estremità e porta un peso nel suo punto medio. Se M, M' sono le masse di una verga e dell'elemento, e $2a$ è la lunghezza di una verga, dimostrare che la velocità angolare intorno all'asse verticale quando le verghe e la fune formano un quadrato è $\sqrt{\frac{3g}{2a\sqrt{2}} \cdot \frac{M+2M'}{M}}$, e se il peso è leggermente depresso nella direzione verticale il tempo di una piccola oscillazione è $2\pi\sqrt{\frac{4a(3+\sqrt{2})}{15g} \cdot \frac{M}{M+2M'}}$.

6. Un anello di peso W che scorre su di una verga inclinata alla verticale sotto un angolo α è legato per mezzo di un filo elastico ad un punto nel piano della verga situato in modo che la sua minima distanza dalla verga sia eguale alla lunghezza naturale del filo. Dimostrare che se θ è l'inclinazione del filo alla verga quando è in equilibrio, $\cot\theta - \cos\theta = \frac{W}{w}\cos\alpha$, dove w è il modulo di elasticità del filo. E se l'anello è leggermente spostato il tempo di una piccola oscillazione sarà $2\pi\sqrt{\frac{Wl}{wg}\frac{1}{1-\text{sen}^3\theta}}$, dove l è la lunghezza naturale del filo.

7. Un tubo circolare di raggio a contiene un filo elastico legato al suo punto più alto, eguale in lunghezza ad $\frac{1}{8}$ della sua circonferenza, e che porta attaccato nella sua altra estremità un elemento pesante il quale pendendo verticalmente raddoppierebbe la sua lunghezza. Il sistema gira intorno al diametro verticale con la velocità angolare $\sqrt{\frac{g}{a}}$. Trovare la posizione di equilibrio relativo e dimostrare che se l'elemento è leggermente disturbato il tempo di una piccola oscillazione è $\frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi+4}}\sqrt{\frac{a}{g}}$.

8. Una verga uniforme pesante AB ha la sua estremità inferiore A fissa ad un asse verticale ed un filo elastico congiunge B ad un altro punto C nell'asse tale che $AC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = a$; il tutto si fa girare intorno ad AC con tale velocità angolare che il filo è il doppio della sua lunghezza naturale, ed orizzontale quando

il sistema è in equilibrio relativo ed allora lasciato a sè stesso. Se la verga è leggermente disturbata in un piano verticale, dimostrare che il tempo di una piccola oscillazione è $2\pi\sqrt{\frac{4a}{21g}}$, il peso della verga essendo sufficiente a distendere il filo per due volte la sua lunghezza.

9. Tre fili elastici eguali AB, BC, CA circondano un arco circolare, l'estremo A essendo fisso. In B e C sono legati due elementi eguali di massa m. Se l è la lunghezza naturale di ciascun filo supposto sempre disteso e λ il modulo di elasticità, mostrare che se l' equilibrio è disturbato gli elementi si troveranno alla loro distanza primitiva dopo intervalli $\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$.

10. Un elemento di massa M è situato vicino al centro di una tavola orizzontale circolare levigata di raggio a, dei fili sono legati all'elemento e passano sopra n carrucole levigate poste ad intervalli eguali intorno alla circonferenza del cerchio; all'altro estremo di ciascuno di questi fili è attaccato un elemento di massa M; mostrare che il tempo di una piccola oscillazione del sistema è $2\pi\left(\frac{2+n}{n}\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$.

11. In un tubo circolare di sezione uniforme che contiene aria, scorrono due dischi circolari che entrano esattamente nel tubo. I due dischi sono situati inizialmente in modo che la linea che congiunge i loro centri passa pel centro del tubo, e l'aria nel tubo è inizialmente della sua densità naturale. Un disco è proiettato in modo che la velocità iniziale del suo centro è una piccola quantità w. Se si trascura l'inerzia dell'aria, dimostrare che il punto sull'asse del tubo equidistante dal centro dei dischi si muove uniformemente e che il tempo di una oscillazione di ciascun disco è $2\pi\sqrt{\frac{Ma}{4P}}$, dove M è la massa di ciascun disco, a il raggio dell'asse del tubo, P la pressione dell'aria sul disco nel suo stato naturale.

12. Una trave uniforme di massa M e di lunghezza $2a$ può girare intorno ad un asse orizzontale fisso in un estremo; all'altro estremo della trave è attaccato un filo di lunghezza l ed all'altro estremo del filo un elemento di massa m. Se, durante una piccola oscillazione del sistema, l'inclinazione del filo alla verticale è sempre due volte quella della trave, allora

$$Mk^2 = (M - 2m)\,a\,(a + l).$$

13. Una superficie conica di semi-angolo verticale α è fissa col suo asse inclinato sotto un angolo θ alla verticale, ed un cono levigato di semi-angolo verticale β è situato dentro di essa in modo che i vertici coincidano. Mostrare che il tempo di una piccola oscillazione $= 2\pi\sqrt{\frac{a \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{g \operatorname{sen}\theta}}$, dove a è la distanza del centro di gravità del cono dal vertice.

14. Più corpi, gli elementi dei quali si attraggono scambievolmente con forze che variano come la distanza, sono capaci di movimento sopra alcune curve e superficie. Dimostrare che se A, B, C sono i momenti d'inerzia del sistema rispetto a tre assi ad angoli retti tra loro condotti pel suo centro di gravità, le posizioni di equilibrio stabile si troveranno facendo $A+B+C$ un minimo.

15. Un corpo rigido è sospeso per mezzo di due fili paralleli ed eguali legati ad esso a due punti simmetricamente situati rispetto ad un asse principale pel centro di gravità che è verticale, e fatto girare intorno a quell'asse per un piccolo angolo si lascia eseguire piccole oscillazioni *finite*. Investigare la riduzione ad oscillazioni infinitamente piccole.

CAPITOLO IX.

Movimento di un Corpo non sollecitato da Forze.

156. *Determinare il movimento di un corpo intorno ad un punto fisso, nel caso in cui non vi sono forze impresse.*

Le equazioni del moto sono per l'Art. 91,

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt}-(B-C)\,\omega_2\,\omega_3=0 \\ B\frac{d\omega_2}{dt}-(C-A)\,\omega_3\,\omega_1=0 \\ C\frac{d\omega_3}{dt}-(A-B)\,\omega_1\,\omega_2=0 \end{aligned}\right\};$$

moltiplicando queste rispettivamente per ω_1, ω_2, ω_3; sommando ed integrando, otteniamo

$$A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2=T \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1),$$

dove T è una costante arbitraria.

Ancora, moltiplicando le equazioni rispettivamente per $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$ otteniamo, similmente

$$A^2\omega_1^2+B^2\omega_2^2+C^2\omega_3^2=G^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2),$$

dove G è una costante arbitraria.

Per trovare un terzo integrale, sia

$$\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=\omega^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3);$$

onde
$$\omega_1\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_2\frac{d\omega_2}{dt}+\omega_3\frac{d\omega_3}{dt}=\omega\frac{d\omega}{dt};$$

allora moltiplicando le equazioni primitive rispettivamente per $\frac{\omega_1}{A}$, $\frac{\omega_2}{B}$, $\frac{\omega_3}{C}$, e sommando, otteniamo

$$\omega\frac{d\omega}{dt}=\left(\frac{B-C}{A}+\frac{C-A}{B}+\frac{A-B}{C}\right)\omega_1\,\omega_2\,\omega_3 \ ..\ (4).$$

$$=-\frac{(B-C)(C-A)(A-B)}{ABC}\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3.$$

Ma risolvendo le equazioni (1), (2), (3), abbiamo

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{BC}{(A-C)(A-B)}(-\lambda_1+\omega^2)\\ \omega_2^2 &= \frac{CA}{(B-A)(B-C)}(-\lambda_2+\omega^2)\\ \omega_3^2 &= \frac{AB}{(C-B)(C-A)}(-\lambda_3+\omega^2)\end{aligned}\right\}\ \dots\dots\ (5),$$

dove $\lambda_1 = \dfrac{T(B+C)-G^2}{BC}$, con simili espressioni per λ_2 e λ_3. Sostituendo nell'equazione (4), abbiamo

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{(\lambda_1-\omega^2)(\lambda_2-\omega^2)(\lambda_3-\omega^2)}\ \dots\dots\ (6).$$

L'integrazione dell'equazione (6) si può ridurre senza difficoltà a dipendere da un integrale ellittico. L'integrazione si può effettuare in termini finiti in due casi; quando $A=B$, e quando $G^2=TB$, dove B è nè la più grande nè la più piccola delle tre quantità A, B, C. Tutti e due questi casi saranno discussi in appresso.

157. Gl'integrali (1) e (2) dell'ultimo articolo sono le equazioni fondamentali da cui si può dedurre molto di ciò che segue. È perciò importante di mostrare come essi si possono dedurre ancora dai principii della Conservazione delle Aree e della Forza Viva. Supponiamo che il corpo sia messo in movimento da una coppia impulsiva la di cui grandezza è G. Allora sappiamo dall'Art. 40 che in tutto il moto susseguente, il momento della quantità di moto rispetto ad ogni linea retta è costante ed eguale al momento della coppia G rispetto a quella linea. Ora per l'Art. 102 i momenti della quantità di moto rispetto agli assi principali ad un istante qualunque sono rispettivamente $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$. Siano (α, β, γ) gli angoli di direzione della normale al piano della coppia G riferita agli assi principali come assi delle coordinate. Allora abbiamo

$$\left.\begin{aligned}A\omega_1 &= G\cos\alpha\\ B\omega_2 &= G\cos\beta\\ C\omega_3 &= G\cos\gamma\end{aligned}\right\}\ \dots\dots\dots\dots\ (1),$$

e sommando i quadrati di queste tre equazioni,

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2\ \dots\dots\dots\ (2).$$

In tutto il moto susseguente, l'intera quantità di moto del corpo è equivalente alla coppia G. È chiaro perciò che se ad un istante qualunque il corpo fosse sollecitato da una coppia impulsiva eguale ed opposta alla coppia G, esso si ridurrebbe in quiete.

158. Segue ancora dall'Art. 122 che il piano di questa coppia è il Piano Invariabile, e la normale ad esso è la Linea Invariabile. Questa linea è assolutamente fissa nello spazio, e le equazioni (1) danno i coseni di direzione di una linea fissa nello spazio in relazione agli assi che si muovono col corpo.

Apparisce da queste equazioni che se i coseni di direzione dell'asse iniziale di rotazione sono (l, m, n) quando si riferisce agli assi principali del corpo, allora i coseni di direzione del piano invariabile sono proporzionali ad Al, Bm, Cn. Se gli assi di riferimento non sono gli assi principali del corpo nel punto fisso, le equazioni corrispondenti ad (1) e (2) si possono dedurre dagli Art. 122 e 102.

159. Poichè il corpo si muove non sollecitato da forze impresse sappiamo che la Forza Viva sarà costante durante il moto. Quindi per l'Art. 139, abbiamo

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

dove T è una costante da determinarsi con i valori iniziali di ω_1, ω_2, ω_3.

Le equazioni (1), (2), (3) basteranno per determinare la traiettoria nello spazio descritta da ogni elemento del corpo, ma non la posizione ad ogni tempo assegnato.

160. Si supporrà generalmente che A, B, C siano in ordine di grandezza, sicchè A è maggiore di B, e B maggiore di C. L'asse di B si chiamerà l'asse di momento medio. Se eliminiamo ω_1 dalle equazioni (2) e (3), abbiamo

$$AT - G^2 = B(A-B)\,\omega_2^2 + C(A-C)\,\omega_3^2,$$

che è essenzialmente positiva. Nello stesso modo possiamo mostrare che $CT - G^2$ è negativa. Così la quantità $\frac{G^2}{T}$ può avere un valore qualunque compreso tra il massimo ed il minimo momento d'inerzia.

Le tre quantità λ_1, λ_2, λ_3 nell'Art. 156 sono tutte positive; infatti essendo $B+C-A$ positiva, e $\frac{G^2}{T} < A$, ne segue che λ_1 è

positiva. Nello stesso modo si può dimostrare che le altre sono positive. Inoltre $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{TC - G^2}{ABC}(A - B)$ con simili espressioni per $\lambda_2 - \lambda_3$ e $\lambda_3 - \lambda_1$. Ne segue facilmente che λ_2 è la massima delle tre, e λ_1 o λ_3 è la minima secondo che $\frac{G^2}{T}$ è $>$ o $< B$.

161. *Spiegare la rappresentazione di Poinsot del movimento per mezzo dell' ellissoide dei momenti.*

Si costruisca l' ellissoide dei momenti nel punto fisso, e sia la sua equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \varepsilon^4.$$

Sia r il raggio vettore di questo ellissoide che coincide con l' asse istantaneo, e p la perpendicolare dal centro sul piano tangente nell' estremità di r. Inoltre sia ω la velocità angolare intorno all' asse istantaneo.

Le equazioni dell' asse istantaneo sono

$$\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3},$$

e se (x, y, z) sono le coordinate dell' estremità della lunghezza r, ciascuna di queste frazioni è eguale ad $\frac{r}{\omega}$.

Sostituendo nell' equazione dell' ellissoide, abbiamo

$$(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2)\frac{r^2}{\omega^2} = \varepsilon^4,$$

onde

$$\omega = \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2} \cdot r.$$

Ancora l' espressione della perpendicolare sul piano tangente in (x, y, z) si sa essere

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}{\varepsilon^8},$$

quindi sostituendo come sopra otteniamo

$$\frac{1}{p^2} = \frac{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2}{\varepsilon^8} \cdot \frac{r^2}{\omega^2}$$
$$= \frac{G^2}{\varepsilon^8} \cdot \frac{\varepsilon^4}{T},$$

onde

$$p = \frac{\sqrt{T}}{G} \cdot \varepsilon^2.$$

L'equazione del piano tangente nel punto (x, y, z) è

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = \varepsilon^4,$$

sostituendo per (x, y, z) vediamo che le equazioni della perpendicolare dall'origine sono

$$\frac{\xi}{A\omega_1} = \frac{\eta}{B\omega_2} = \frac{\zeta}{C\omega_3};$$

ma queste sono le equazioni della linea invariabile. Quindi questa perpendicolare è fissa nello spazio.

Da queste equazioni deduciamo

(1) *La velocità angolare rispetto al raggio vettore intorno al quale il corpo gira varia come quel raggio vettore.*

(2) *La parte risoluta della velocità angolare intorno alla perpendicolare sul piano tangente nell'estremità dell'asse istantaneo è costante.*

Infatti il coseno dell'angolo tra la perpendicolare ed il raggio vettore è $= \frac{p}{r}$. Quindi la velocità angolare risoluta è $= \omega\frac{p}{r} = \frac{T}{G}$, che è costante.

(3) *La perpendicolare sul piano tangente nell'estremità dell'asse istantaneo è fissa in direzione,* cioè, *normale al piano invariabile e costante in lunghezza.*

Il movimento dell'ellissoide dei momenti è quindi tale che il suo centro essendo fisso, esso tocca sempre un piano fisso, ed il punto di contatto essendo nell'asse istantaneo non ha alcuna velocità. *Quindi il movimento si può rappresentare supponendo che l'ellissoide dei momenti rotoli sul piano fisso con il suo centro fisso.*

162. Per agevolare il concetto del movimento del corpo, supponiamolo situato in modo, che il piano della coppia G, la quale lo metterebbe in moto, sia orizzontale. Si tiri un piano tangente all'ellissoide dei momenti parallelo al piano della coppia G, e questo piano sia fisso nello spazio. L'ellissoide rotoli su questo piano fisso, il suo centro rimanendo fisso, con una velocità angolare che varii come il raggio vettore condotto al punto di contatto, e trasporti esso con sè il corpo dato. Avremo allora costruito il movimento che il corpo prenderebbe se fosse lasciato a sè stesso dopo l'azione iniziale della coppia impulsiva G.

Il punto di contatto dell'ellissoide col piano sul quale esso rotola traccia due curve, l'una sulla superficie dell'ellissoide, e l'altra sul piano. La prima di queste è fissa nel corpo e si chia-

ma la *poloide*, la seconda è fissa nello spazio e si chiama l'*erpoloide*. Le equazioni di una poloide qualunque riferita agli assi principali del corpo si possono trovare con la considerazione che la lunghezza della perpendicolare sul piano tangente dell'ellissoide in un punto qualunque della poloide è costante. Quindi le sue equazioni sono

$$\left.\begin{aligned} A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 &= \frac{G^2\varepsilon^4}{T} \\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 &= \varepsilon^4 \end{aligned}\right\}.$$

Eliminando y, abbiamo

$$A(A-B)x^2 + C(C-B)z^2 = \left(\frac{G^2}{T} - B\right)\varepsilon^4.$$

Quindi se B è l'asse di massimo o minimo momento d'inerzia, i segni dei coefficienti di x^2 e z^2 saranno gli stessi, e la proiezione della poloide sarà un'ellisse. Ma se B è l'asse di momento d'inerzia medio, la proiezione è un'iperbole.

Una poloide è quindi una curva chiusa descritta intorno all'asse di massimo o minimo momento, e la concavità è rivolta verso l'asse di massimo o di minimo momento secondo che $\frac{G^2}{T}$ è maggiore o minore del momento medio d'inerzia. La linea che separa i due sistemi di poloidi è quella poloide di cui la proiezione sul piano perpendicolare all'asse del momento medio è un iperbole la di cui concavità è rivolta nè all'asse di massimo, nè all'asse di minimo momento. In questo caso $\frac{G^2}{T} = B$, e la proiezione consiste di due linee rette le di cui equazioni sono

$$A(A-B)x^2 - C(B-C)z^2 = 0.$$

Questa poloide consiste di due ellissi che passano per l'asse di momento medio, e corrisponde al caso in cui la perpendicolare sul piano tangente è eguale all'asse medio dell'ellissoide. Questa poloide si chiama la *poloide separatrice*.

Poichè la proiezione della poloide sopra uno dei piani principali è sempre un'ellisse, la poloide deve essere una curva rientrante.

Considerando l'erpoloide descritta per mezzo del rotolare di un ellissoide sul piano della carta, è chiaro che l'erpoloide giace sempre fra due circoli che essa tocca alternativamente. L'erpo-

loide quindi non è in generale rientrante; ma se la distanza angolare dei due punti in cui essa tocca successivamente lo stesso circolo è commensurabile con 2π, essa sarà una curva rientrante.

163. Il movimento del corpo si può anche rappresentare geometricamente per mezzo dell'ellissoide di girazione. Questo ellissoide è il reciproco dell'ellissoide dei momenti, ed il movimento di un ellissoide si può dedurre da quello dell'altro reciprocando le proprietà dimostrate negli Articoli precedenti. Troviamo.

(1) L'equazione dell'ellissoide riferito ai suoi assi principali è

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1.$$

(2) Questo ellissoide si muove in modo che la sua superficie passa sempre per un punto fisso nello spazio. Questo punto giace nella linea invariabile ad una distanza $\frac{G}{\sqrt{T}}$ dal punto fisso. Per l'Art. 160 sappiamo che questa distanza è minore del massimo, e maggiore del minimo semidiametro dell'ellissoide.

(3) La perpendicolare sul piano tangente nel punto fisso è l'asse istantaneo di rotazione, e la velocità angolare del corpo varia inversamente come la lunghezza di questa perpendicolare. Se p è la lunghezza di questa perpendicolare, allora $\omega = \frac{\sqrt{T}}{p}$,

(4) La velocità angolare intorno alla linea invariabile è costante ed $= \frac{T}{G}$.

La curva corrispondente alla poloide è la traiettoria descritta sulla superficie mobile dell'ellissoide dal punto fisso nello spazio. Questa curva è chiaramente una conica sferica. Le equazioni della conica sferica descritta sotto date condizioni iniziali qualunque si vede facilmente che sono

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{G^2}{T} \\ \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Queste coniche sferiche si può mostrare che sono curve chiuse

intorno agli assi di massimo e minimo momento. Ma in un caso, cioè quando $\frac{G^2}{T}=B$, dove B è nè il massimo nè il minimo momento d'inerzia, la conica sferica si riduce alle due sezioni circolari centrali dell'ellissoide di girazione.

Il movimento del corpo si può così costruire per mezzo di ciascuno di questi ellissoidi. L'ellissoide dei momenti raffigura la forma generale del corpo meglio dell'ellissoide di girazione. Esso è protuberante dove il corpo è protuberante, e compresso dove il corpo è compresso. L'inverso di ciò accade per l'ellissoide di girazione.

164. Se un corpo è messo in rotazione intorno ad un asse principale in un punto fisso, esso continuerà a girare intorno a quell'asse come un asse permanente. Ma i tre assi principali nel punto fisso non posseggono eguali gradi di stabilità. Se una piccola causa perturbatrice agisce sul corpo, l'asse di rotazione si muoverà in una poloide circonvicina. Se questa poloide è una piccola curva prossimamente circolare che racchiude l'asse originale di rotazione, l'asse istantaneo non devierà mai nel corpo lontano dall'asse principale che era la sua posizione primitiva. L'erpoloide inoltre sarà una curva di piccole dimensioni, sicchè l'asse principale non devierà mai lontano da una linea retta fissa nello spazio. In questo caso si dice che la rotazione è *stabile*. Ma se la poloide circonvicina non è prossimamente circolare, l'asse istantaneo devierà lontano dalla sua posizione primitiva nel corpo. In questo caso una perturbazione molto piccola può produrre un cambiamento molto grande nel movimento susseguente, e la rotazione si dice essere *instabile*.

Se l'asse iniziale di rotazione è l'asse OB di momento medio, le poloidi circostanti hanno tutte le loro convessità rivolte verso B. A meno che, quindi, la causa perturbatrice non sia tale che l'asse di rotazione si sposti lungo la poloide separatrice, la rotazione deve essere instabile. Se lo spostamento è lungo la poloide separatrice, l'asse può avere una tendenza a ritornare alla sua posizione primitiva. Questo caso sarà considerato nell'Art. 180, e per questo particolare spostamento la rotazione si può dire stabile.

Se l'asse iniziale di rotazione è l'asse di massimo o minimo momento, le poloidi circostanti sono ellissi di maggiori o minori eccentricità. Se esse sono prossimamente circolari, la rotazione sarà certamente stabile; se molto ellittiche, l'asse si allontanerà molto dalla sua posizione iniziale, e la rotazione si può chiamare

instabile. Se OC è l'asse di rotazione iniziale, il rapporto dei quadrati degli assi della poloide circonvicina è ultimamente $\frac{A(A-C)}{B(B-C)}$. È necessario perciò per la stabilità della rotazione che questo rapporto non differisca molto dall'unità.

È ben noto che la fermezza o stabilità di un corpo in movimento si accresce di molto con una rapida rotazione intorno ad un asse principale. La ragione di ciò è evidente da quanto precede. Se il corpo è messo in rotazione intorno ad un asse molto vicino all'asse principale di massimo o minimo momento, la poloide e l'erpoloide saranno generalmente curve molto piccole, e la direzione di quell'asse principale del corpo sarà molto prossimamente fissa nello spazio. Se ora un piccolo impulso f agisce sul corpo, l'effetto sarà di alterare leggermente la posizione dell'asse istantaneo. Esso si muoverà da una poloide ad un'altra molto vicina alla prima, e così la posizione angolare dell'asse nello spazio non sarà alterata di molto. Sia Ω la velocità angolare del corpo, ω quella generata dall'impulso, allora pel parallelogrammo delle velocità angolari, il cambiamento nella posizione dell'asse istantaneo non può essere maggiore di $\text{sen}^{-1}\frac{\omega}{\Omega}$. Quindi se Ω è grande, ω deve essere anche grande, per produrre un cambiamento considerevole nell'asse di rotazione. Ma se il corpo non ha alcuna rotazione iniziale Ω, l'impulso può generare una velocità angolare ω intorno ad un asse che non coincide prossimamente con un asse principale. La poloide e l'erpoloide possono essere allora curve grandi, e l'asse istantaneo di rotazione si muoverà intorno sì nel corpo che nello spazio. Il movimento apparirà allora molto instabile.

165. Vi sono quattro coni che hanno importanti relazioni col movimento del corpo.

Il Primo Cono.

Movendosi il corpo intorno al punto fisso la linea invariabile descrive un cono nel corpo. Le equazioni di questa linea in un istante qualunque riferita agli assi principali del corpo come assi coordinati sono

$$\frac{x}{A\omega_1} = \frac{y}{B\omega_2} = \frac{z}{C\omega_3},$$

e per l'Art. 156 abbiamo

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = (A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2)\frac{T}{G^2};$$

quindi l'equazione del cono è

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = (x^2 + y^2 + z^2)\frac{T}{G^2}.$$

Questo cono è di secondo ordine, i suoi assi coincidendo con i diametri principali dell'ellissoide dei momenti. La forma dell'equazione mostra che esso intersega l'ellissoide di girazione in una conica sferica, e che le sue sezioni circolari sono parallele a quelle dell'ellissoide di girazione, e perpendicolari agli asintoti della conica focale dell'ellissoide dei momenti. Esso si riduce a due piani quando le condizioni iniziali sono tali che $\frac{G^2}{T} = B$.

Siccome questo cono è generato dalla linea invariabile, esso si può chiamare il *Cono Invariabile.*

166. *Trovare la ragione secondo la quale la linea invariabile descrive il suo cono nel corpo.*

Sia OI il raggio vettore dell'ellissoide dei momenti che coincide con l'asse istantaneo, OG la perpendicolare sul piano tangente in I. Un raggio vettore, che al tempo t coincide con la linea invariabile, faccia un angolo $d\psi$ al tempo $t+dt$ con la linea invariabile. Allora $\frac{d\psi}{dt}$ è la ragione secondo la quale la linea invariabile descrive il suo cono.

Poichè il corpo gira intorno ad OI con una velocità angolare ω, abbiamo

$$OG\frac{d\psi}{dt} = \text{velocità di } G$$
$$= \omega \cdot OG \operatorname{sen} GOI.$$

Inoltre per l'Art. 161 abbiamo

$$\frac{T}{G} = \omega \cos GOI.$$

Eliminando l'angolo GOI, otteniamo

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \omega^2 - \frac{T^2}{G^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Eliminando ω, abbiamo

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{T}{G}\tan GOI \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Inoltre $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$

$$= G^2 \left\{ \frac{\cos^2\alpha}{A^2} + \frac{\cos^2\beta}{B^2} + \frac{\cos^2\gamma}{C^2} \right\}.$$

Quindi la formola

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = G^2 \left\{ \frac{\cos^2\alpha}{A^2} + \frac{\cos^2\beta}{B^2} + \frac{\cos^2\gamma}{C^2} \right\} - \frac{T^2}{G^2} \quad \ldots. \quad (3),$$

dà la velocità di OG in termini dei suoi coseni di direzione.

Una qualunque di queste tre espressioni darà la velocità con la quale il punto fisso nello spazio percorre la conica sferica sulla superficie dell'ellissoide di girazione. Altre formole per determinare il movimento saranno date in un altro articolo.

Il Secondo e Terzo Cono.

167. *Il Secondo Cono.* Se un corpo che ha un punto fisso è messo in rotazione intorno ad un asse, esso non continuerà a girare intorno a quell'asse, ma l'asse istantaneo descriverà un cono nel corpo. Le equazioni dell'asse istantaneo ad un istante qualunque riferito agli assi principali del corpo sono

$$\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3},$$

e per l'Art. 156 abbiamo

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = (A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2)\frac{T}{G^2};$$

quindi l'equazione del cono è

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = (A^2x^2 + B^2y^2 + G^2z^2)\frac{T}{G^2}.$$

Questo cono è di secondo ordine, i suoi assi coincidendo con i diametri principali dell'ellissoide dei momenti. Esso intersega l'ellissoide dei momenti in una poloide, e si riduce a due piani quando le condizioni iniziali sono tali che $\frac{G^2}{T} = B$.

168. *Il Terzo Cono.* L'asse istantaneo descrive ancora un cono nello spazio. Le equazioni di questo cono non si possono trovare generalmente, ma quando si possono determinare abbiamo un altra rappresentazione geometrica del movimento. Infatti si suppongano costruiti i due coni descritti dall'asse istantaneo nel

corpo e nello spazio. Siccome ciascuno di questi coni contiene due posizioni consecutive della loro generatrice comune, essi si toccheranno scambievolmente lungo l'asse istantaneo. Allora i punti di contatto non avendo alcuna velocità il movimento sarà rappresentato facendo che il cono fisso nel corpo rotoli sul cono fisso nello spazio. Siccome questi coni intersegano l'ellissoide dei momenti in una poloide ed in una erpoloide essi si possono chiamare rispettivamente il *cono della poloide* ed il *cono della erpoloide*.

169. *Trovare la velocità con la quale l'asse istantaneo descrive ciascuno dei coni da esso generati.*

Primo. *Quando i coni sono dati.*

I raggi di curvatura dei due coni in un punto qualunque I della loro linea di contatto OI siano R, R' e sia $OI = r$. Questi coni si possono supporre formati di piani triangolari, che vengono successivamente in contatto ad intervalli di tempo dt. Siano $d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ gli angoli tra due piani successivi in ciascun cono. Allora il corpo girando intorno all'asse istantaneo descrive l'angolo $d\varepsilon - d\varepsilon'$. Ma esso descrive anche ωdt; quindi

$$\omega dt = d\varepsilon - d\varepsilon'.$$

Sia $d\psi$ l'angolo tra le due posizioni dell'asse istantaneo ai tempi t e $t + dt$. Allora

$$d\varepsilon = \frac{r d\psi}{R}, \qquad d\varepsilon' = \frac{r d\psi}{R'};$$

onde

$$\omega = r \frac{d\psi}{dt} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Se il punto I è preso nell'ellissoide dei momenti, abbiamo

$$\omega = \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2} r;$$

onde

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^{-1}.$$

Qui R, R' sono i raggi di curvatura dei due coni nei punti in cui la loro linea di contatto interseca l'ellissoide dei momenti.

170. Secondo. *Trovare il movimento dell'asse istantaneo lungo il cono che esso descrive nel corpo.*

Se (x, y, z) sono le coordinate di un punto qualunque sulla poloide riferita agli assi principali del corpo nel punto fisso come

assi coordinati, ed r è il raggio vettore, abbiamo

$$\frac{\omega_1}{x} = \frac{\omega_2}{y} = \frac{\omega_3}{z} = \frac{\omega}{r} = \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2}.$$

Quindi in una qualunque delle equazioni dell'Art. 156, possiamo rimpiazzare le velocità angolari con le coordinate corrispondenti dell'estremità dell'asse istantaneo. Otteniamo così

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{BC}{(A-C)(A-B)}(-\lambda_1' + r^2) \\ y^2 &= \frac{CA}{(B-A)(B-C)}(-\lambda_2' + r^2) \\ z^2 &= \frac{AB}{(C-B)(C-A)}(-\lambda_3' + r^2) \end{aligned}\right\},$$

ed
$$r\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2}\sqrt{(\lambda_1' - r^2)(\lambda_2' - r^2)(\lambda_3' - r^2)},$$

dove $\lambda_1' = \frac{T(B+C) - G^2}{BC} \cdot \frac{\varepsilon^4}{T}$, con simili espressioni per λ_2' e λ_3'. Inoltre abbiamo le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2} \cdot \frac{B-C}{A} yz \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2} \cdot \frac{C-A}{B} zx \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2} \cdot \frac{A-B}{C} xy \end{aligned}\right\}.$$

Da queste equazioni possiamo trovare $\frac{ds}{dt}$ in termini di r.

171. Terzo. *Trovare il movimento dell'asse istantaneo lungo il cono che esso descrive nello spazio.*

Siano, come sopra, (x, y, z) le coordinate, rispetto agli assi principali del corpo, del punto I in cui l'asse istantaneo incontra la poloide. Durante il movimento del corpo la poloide rotola sulla erpoloide, è chiaro perciò che la velocità dell'estremità I dell' asse istantaneo lungo la erpoloide è la stessa di quella lungo la poloide. Quindi le parti risolute della velocità di I *nello spa-*

zio parallele agli assi sono $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Il momento di queste rispetto all'asse delle z è $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$. Quindi il momento di queste rispetto alla linea invariabile OG è

$$= \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\frac{C\omega_3}{G} + \text{etc.} + \text{etc.}$$

Sostituendo per $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, etc., ω_1 etc., i loro valori in termini di x, y, z dall'ultimo articolo, l'espressione del momento diviene

$$= \frac{T}{\varepsilon^4} \cdot \frac{Cz^2}{G}\left(\frac{C-A}{B}x^2 - \frac{B-C}{A}y^2\right) + \dots$$

$$= \frac{T}{\varepsilon^4} \cdot \frac{Cz^2}{G} \cdot \left\{\frac{C}{B-A}(-\lambda_1' + r^2) - \frac{C}{B-A}(-\lambda_2' + r^2)\right\} + \dots$$

$$= \frac{T}{\varepsilon^4} \cdot \frac{C^2(\lambda_1' - \lambda_2')}{(A-B)G} \cdot z^2 + \dots$$

Sostituendo ancora per z^2, etc. i loro valori in termini di r^2, l'espressione del momento diviene

$$= \frac{ABC^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{(A-B)(B-C)(C-A)G} \cdot (\lambda_3' - r^2) + \dots$$

Ora $(\lambda_1 - \lambda_2)ABC = (TC - G^2)(A - B)$; quindi sostituendo, il coefficiente di r^2 si vede facilmente che è $\frac{T}{G}$, e la parte costante è

$$\frac{(TA - G^2)(TB - G^2)(TC - G^2)}{ABC \cdot G^3} \cdot \frac{\varepsilon^4}{T} - \frac{T^3}{G^3}\frac{\varepsilon^4}{T}.$$

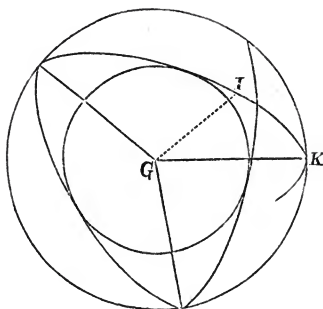
Sia ρ la distanza dell'estremità I dell'asse istantaneo dalla linea invariabile OG, e φ l'angolo che il piano condotto per la linea invariabile e per l'asse istantaneo fa con un piano fisso qualunque che passa per la linea invariabile. Allora il momento della velocità di I rispetto ad OG è $\rho^2\frac{d\varphi}{dt}$, ed $r^2 = \rho^2 + \frac{T\varepsilon^4}{G^2}$. Quindi eguagliando queste due espressioni del momento, abbiamo

$$\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{T}{G}\rho^2 + \frac{(TA - G^2)(TB - G^2)(TC - G^2)}{ABC \cdot G^3} \cdot \frac{\varepsilon^4}{T}.$$

Se si vuol trovare $d\psi$ l'angolo tra le due posizioni dell'asse istantaneo ai tempi t e $t+dt$, abbiamo l'equazione

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Il valore di $\frac{dr}{dt}$ è dato nell'Art. 170, e sostituendo per ρ e $\frac{d\varphi}{dt}$ i loro valori ora trovati in termini di r, questa equazione dà $\frac{d\psi}{dt}$.

172. L'estremità I dell'asse istantaneo descrivendo l'erpoloide sul piano tangente invariabile, essa alternativamente si avvicina e si allontana da G, il piede della perpendicolare. La massima e la minima distanza di I da G si troveranno facendo $\frac{d\rho}{dt}=0$. Poichè $r^2-\rho^2=$ costante questo dà $\frac{dr}{dt}=0$. Quindi per l'Art. 170 $r=\sqrt{\lambda_3'}$ o $\sqrt{\lambda_1'}$ o $\sqrt{\lambda_2'}$.

I tre valori risultanti di ρ^2 sono

$$-h^2\left(1-\frac{G^2}{AT}\right)\left(1-\frac{G^2}{BT}\right)$$

$$-h^2\left(1-\frac{G^2}{BT}\right)\left(1-\frac{G^2}{CT}\right)$$

$$-h^2\left(1-\frac{G^2}{CT}\right)\left(1-\frac{G^2}{AT}\right),$$

dove $h^2=\frac{T\varepsilon^4}{G^2}$ la lunghezza della perpendicolare dal punto fisso

sul piano tangente invariabile. Poichè $\frac{G^2}{T}$ deve essere compresa tra A e C, si vedrà che l'ultima espressione è la massima tra le tre ed è sempre positiva. Delle altre due la prima o la seconda è positiva secondo che $\frac{G^2}{T}$ è maggiore o minore di B. Con questi due valori reali di ρ come raggi, si descrivano due circoli intorno a G il piede della perpendicolare sul piano tangente invariabile. Allora l'erpoloide giace tra questi due circoli. Si ponga il raggio maggiore $GK=k$, e sia φ l'angolo che un raggio vettore qualunque GI fa con GK, allora

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{T}{G}-\frac{TB-G^2}{BG}\cdot\left(\frac{k}{\rho}\right)^2,$$

e la velocità angolare intorno ad OI è data da

$$\omega^2=\frac{T}{\varepsilon^4}(\rho^2+h^2).$$

173. *Trovare l'equazione differenziale del cono descritto nello spazio dall'asse istantaneo.*

Poichè la perpendicolare sul piano tangente all'ellissoide dei momenti nell'estremità dell'asse istantaneo è costante, ed $=\frac{\sqrt{T}}{G}\varepsilon^2$, abbiamo $rdr=\rho d\rho$. Quindi l'equazione polare dell'erpoloide si trova dividendo le espressioni di $r\frac{dr}{dt}$ e $\rho^2\frac{d\varphi}{dt}$ date negli Art. 170 e 171, otteniamo così

$$\frac{d\rho}{\rho d\varphi}=\frac{\frac{\sqrt{T}}{\varepsilon^2}\sqrt{\left(\lambda_1'-\frac{T\varepsilon^4}{G^2}-\rho^2\right)\left(\lambda_2'-\frac{T\varepsilon^4}{G^2}-\rho^2\right)\left(\lambda_3'-\frac{T\varepsilon^4}{G^2}-\rho^2\right)}}{\frac{T}{G}\rho^2+\frac{(TA-G^2)(TB-G^2)(TC-G^2)}{ABC\cdot G^3}\cdot\frac{\varepsilon^4}{T}}$$

Sia θ l'angolo che GI fa con OG, allora l'equazione polare del cono si può trovare ponendo $\rho=\frac{\sqrt{T}}{G}\varepsilon^2\tan\theta$.

Questa equazione non si può in generale integrare. Se, però, le circostanze iniziali sono tali che $G^2=TB$, l'integrazione si può effettuare.

Il Quarto Cono.

174. Sia O il punto fisso, OI l'asse istantaneo. La velocità angolare ω intorno ad OI si risolva in due, cioè una velocità angolare uniforme $\frac{T}{G}$ intorno alla linea invariabile OG, ed una velocità angolare $\omega \operatorname{sen} IOG$ intorno ad una linea OH che giace in un piano fisso nello spazio perpendicolare alla linea invariabile, e che passa pel punto fisso O. Questo piano fisso si chiami il piano invariabile in O. Movendosi il corpo, OH descriverà un cono nel corpo il quale toccherà sempre questo piano fisso. La velocità di un punto qualunque del corpo che si trova per un istante in OH non è alterata dalla rotazione intorno ad OH, ed il punto ha perciò solamente il moto dovuto alla velocità angolare uniforme intorno ad OG. Abbiamo così una nuova rappresentazione del movimento del corpo. Sia costruito il cono descritto da OH nel corpo, e rotoli sul piano invariabile in O con la propria velocità angolare, mentre nello stesso tempo questo piano gira intorno alla linea invariabile con una velocità angolare uniforme $\frac{T}{G}$. Il cono descritto da OH nel corpo è il quarto cono. Esso è stato chiamato da Poinsot il *Cono Rotante e Strisciante.*

175. *Trovare una costruzione pel quarto cono.* La sua generatrice OH è ad angoli retti ad OG, e giace nel piano IOG. Ora OG è fissa nello spazio; sia OG' la linea nel corpo che, dopo un intervallo di tempo dt, verrà nella posizione OG. Poichè il corpo gira intorno ad OI, il piano GOG' è perpendicolare al piano GOI, e quindi OH è perpendicolare ad OG ed OG'. Cioè, OH è perpendicolare al piano tangente al cono descritto da OG nel corpo. Il cono descritto da OH nel corpo è quindi il *cono reciproco* di quello descritto da OG.

L'equazione del cono descritto da OG si è mostrato essere

$$\frac{AT-G^2}{A}x^2+\frac{BT-G^2}{B}y^2+\frac{CT-G^2}{C}z^2=0.$$

Quindi l'equazione del cono descritto da OH è

$$\frac{A}{AT-G^2}x^2+\frac{B}{BT-G^2}y^2+\frac{C}{CT-G^2}z^2=0.$$

Le linee focali del cono descritto da OH sono perpendicolari

alle sezioni circolari del cono reciproco, cioè del cono descritto da OG. E queste sezioni circolari sono le stesse delle sezioni circolari dell'ellissoide di girazione. Le equazioni delle linee focali del cono descritto da OH sono perciò

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}}=\dfrac{z^2}{\dfrac{1}{B}-\dfrac{1}{C}}\\ y=0\end{array}\right\}.$$

Così le linee focali giacciono nel piano che contiene gli assi di massimo e minimo momento, e sono indipendenti dalle condizioni iniziali.

Questo cono diviene una linea retta nel caso in cui il cono descritto da OG diviene un piano, cioè, quando le condizioni iniziali sono tali che $G^2=BT$.

176. *Trovare il movimento di* OH *lungo il cono che esso descrive nel corpo.*

Poichè OG, OH, OI sono sempre nello stesso piano, il movimento angolare di OH nello spazio intorno alla linea fissa OG è lo stesso di quello di OI, ed è dato dall'espressione di $\frac{d\varphi}{dt}$ nell'Art. 171. Ma il cono rotola su di un piano che gira intorno ad OG con una velocità angolare $\frac{T}{G}$. Quindi il moto angolare di OH relativamente a questo piano è $\frac{d\varphi}{dt}-\frac{T}{G}$. Ma se $d\chi$ è l'angolo tra due posizioni consecutive di OH nel corpo, questo movimento angolare è espresso da $\frac{d\chi}{dt}$. Quindi

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{(TA-G^2)(TB-G^2)(TC-G^2)}{ABCTG^3}\cdot\frac{\varepsilon^4}{\rho^2}.$$

Qui ρ è la distanza da OG del punto I nel quale l'asse istantaneo intersega l'ellissoide dei momenti. Se $OI=r$, abbiamo $\rho=r \operatorname{sen} GOI=\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{T}}\cdot\omega \operatorname{sen} GOI$; e quindi abbiamo $\rho^2=\frac{\varepsilon^4}{T}\left(\omega^2-\frac{T^2}{G^2}\right)$. L'espressione del movimento angolare di OH è quindi

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{(TA-G^2)(TB-G^2)(TC-G^2)}{ABCG^3}\cdot\frac{1}{\omega^2-\frac{T^2}{G^2}}.$$

Movimento degli Assi Principali.

177. *Trovare i movimenti angolari nello spazio degli assi principali del corpo.*

Sarà molto conveniente di riferire il movimento alla linea invariabile OG come asse delle z. Siano (α, β, γ) gli angoli che gli assi principali OA, OB, OC del corpo fanno con la linea invariabile. Allora abbiamo

$$\cos\alpha = \frac{A\omega_1}{G},\ \cos\beta = \frac{B\omega_2}{G},\ \cos\gamma = \frac{C\omega_3}{G} \ \ldots\ldots (1).$$

Siano (λ, μ, ν) gli angoli che i piani GOA, GOB, e GOC fanno con un piano qualunque fisso nello spazio che passa per OG. Allora per trovare il movimento di OA, cerchiamo $\frac{d\alpha}{dt}$ e $\frac{d\lambda}{dt}$. Per le Equazioni di Eulero, $A\frac{d\omega}{dt} - (B-C)\,\omega_2\,\omega_3 = 0$. Sostituendo per $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dalle equazioni (1) otteniamo perciò

$$\operatorname{sen}\alpha\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) G\cos\beta\cos\gamma \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ma $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sono legati dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\cos^2\alpha}{A} + \frac{\cos^2\beta}{B} + \frac{\cos^2\gamma}{C} = \frac{T}{G^2} \\ &\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Quindi

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\cos^2\beta = \frac{T}{G^2} - \frac{1}{C} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)\cos^2\alpha \\ &\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)\cos^2\gamma = \frac{T}{G^2} - \frac{1}{B} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\cos^2\alpha \end{aligned}\right\} \ldots (4).$$

Sostituendo troviamo $\operatorname{sen}\alpha\frac{d\alpha}{dt}$

$$= G\sqrt{\left\{\frac{1}{C} - \frac{T}{G^2} - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\cos^2\alpha\right\}\left\{\frac{T}{G^2} - \frac{1}{B} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\cos^2\alpha\right\}}$$
$$+ \ldots\ldots (5).$$

Ancora, sia OI l'asse istantaneo, allora il movimento di A risoluto perpendicolarmente a GA è

$$\operatorname{sen}\alpha\frac{d\lambda}{dt}=\omega\operatorname{sen}AI\cdot\cos GAI$$
$$=\omega\frac{\cos GI-\cos\alpha\cdot\cos AI}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Ma $\omega\cos GI$ è la parte risoluta della velocità angolare intorno ad OG che è eguale a $\frac{T}{G}$, ed $\omega\cos AI$ è la parte risoluta della velocità angolare intorno ad OA che è ω_1. Quindi

$$\operatorname{sen}^2\alpha\frac{d\lambda}{dt}=\frac{T}{G}-\omega_1\cos\alpha \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$
$$=\frac{T}{G}-\frac{G\cos^2\alpha}{A} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

178. In simil modo possiamo trovare il movimento di ogni altra linea OL fissa nel corpo e che passa pel punto fisso. Siano (l,m,n) i coseni di direzione di OL riferita agli assi principali nel punto fisso. Sia i l'angolo che OL fa con la linea invariabile, j l'angolo che il piano LOG fa con un piano qualunque fisso nello spazio e che passa per OG. Allora

$$\cos i=l\cos\alpha+m\cos\beta+n\cos\gamma \quad\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Differenziando e procedendo come sopra, abbiamo

$$\operatorname{sen}i\frac{di}{dt}=G\left\{\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)l\cos\beta\cos\gamma\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)m\cos\gamma\cos\alpha+\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)n\cos\alpha\cos\beta\right\},$$

dove $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ si debbono eliminare per mezzo delle tre equazioni (3) ed (8).

Inoltre se ω' è la parte risoluta della velocità angolare intorno ad OL, abbiamo con lo stesso ragionamento

$$\operatorname{sen}^2 i\frac{dj}{dt}=\frac{T}{G}-\omega'\cos i.$$

Questo si può anche scrivere nella forma

$$\operatorname{sen}^2 i\frac{dj}{dt}=\frac{T}{G}-\left(\frac{l\cos\alpha}{A}+\frac{m\cos\beta}{B}+\frac{n\cos\gamma}{C}\right)G\cos i.$$

Sia OL' la perpendicolare sul piano tangente nel punto in cui

la linea OL interseca l'ellissoide di girazione. Allora i coseni di direzione di OL' sono $pr\frac{l}{A}$, $pr\frac{m}{B}$, $pr\frac{n}{C}$, dove p è la lunghezza della perpendicolare secondo OL' ed r la lunghezza del raggio vettore secondo OL. Sia i' l'angolo che OL' fa con OG. Allora

$$\operatorname{sen}^2 i \frac{dj}{dt} = \frac{T}{G} - \frac{G}{pr} \cos i \cos i'.$$

179. Le equazioni (5) e (6) nell'Art. 177 per la determinazione di α e λ in termini di t non si possono completamente integrare. Esse evidentemente dipendono dagl'integrali ellittici. Possiamo però osservare che

(1) Essendo il primo membro dell'equazione (5) necessariamente reale, dobbiamo avere

$$\cos^2\alpha < \frac{\frac{1}{C} - \frac{T}{G^2}}{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}} \text{ e } > \frac{\frac{1}{B} - \frac{T}{G^2}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}},$$

se l'ultima è positiva. Così la spirale descritta da uno qualunque A degli assi principali sulla superficie di una sfera il di cui centro è il punto fisso giace tra due circoli concentrici, che essa tocca alternativamente. Se $\frac{1}{B} - \frac{T}{G^2}$ è negativa, la poloide descritta dall'asse istantaneo ha la sua concavità rivolta verso l'asse di C, e $\cos\alpha$ non ha alcun limite inferiore. In questo caso la spirale giace sempre tra due circoli minori sulla sfera, uno dei quali è esattamente opposto all'altro.

(2) Affinchè $\frac{d\lambda}{dt}$ svanisca, dobbiamo avere $\cos^2\alpha = \frac{AT}{G^2}$, ma questo con la sostituzione si trova che rende $\frac{d\alpha}{dt}$ immaginario. Così $\frac{d\lambda}{dt}$ ritiene sempre un segno. Possiamo porre l'espressione nella forma

$$\frac{A}{G}\frac{d\lambda}{dt} = 1 + \frac{\frac{AT}{G^2} - 1}{1 - \cos^2\alpha}.$$

Se quindi le condizioni iniziali sono tali che $\frac{G^2}{T}$ è minore del momento d'inerzia rispetto all'asse che descrive la spirale che

si considera, la velocità angolare sarà massima quando l'asse è il più vicino alla linea invariabile e minima quando l'asse è il più lontano.

Movimento quando $G^2 = BT$.

180. Alle particolarità di questo caso si è fatto già allusione parecchie volte. Quando le condizioni iniziali sono tali che ha luogo questa relazione tra la Forza Viva e la Quantità di Moto del corpo l'intera discussione del movimento diviene più semplice.

Le equazioni fondamentali del movimento sono

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 &= T \\ A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 &= G^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Quindi quando $G^2 = BT$, abbiamo

$$A(A-B)\,\omega_1^2 = C(B-C)\,\omega_3^2\,,$$

ed

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{B-C}{A-C}\cdot\frac{G^2 - B^2\omega_2^2}{AB} \\ \omega_3^2 &= \frac{A-B}{A-C}\cdot\frac{G^2 - B^2\omega_2^2}{BC} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ma

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{C-A}{B}\,\omega_1\,\omega_3\,;$$

onde

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \mp\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}\cdot\frac{G^2 - B^2\omega_2^2}{B^2}\,.$$

Quando i valori iniziali di ω_1 ed ω_3 hanno gli stessi segni, $(C-A)\,\omega_1\omega_3$ è negativa e perciò $\frac{d\omega_2}{dt}$ deve essere negativo, quindi in questa espressione si deve usare il segno superiore o l'inferiore secondo che i valori iniziali di ω_1, ω_3 hanno segni simili o dissimili. Quindi

$$\frac{B}{G^2 - B^2\omega_2^2}\,\frac{d\omega_2}{dt} = \mp\frac{1}{B}\sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}$$

$$= \mp\frac{n}{B} \text{ supponiamo ;}$$

onde

$$\frac{G + B\omega_2}{G - B\omega_2} = E\cdot e^{\mp\frac{2G}{B}nt}\,,$$

dove E è una costante indeterminata.

Quindi
$$\frac{B\omega_2}{G}=\frac{E\cdot e^{\mp\frac{2G}{B}nt}-1}{E\cdot e^{\mp\frac{2G}{B}nt}+1}.$$

Al crescere di t indefinitamente ω_2 si avvicina a $\mp\frac{G}{B}$ come suo limite e quindi per (2) ω_1 ed ω_3 si avvicinano a zero.

La conclusione si è che l'asse istantaneo ultimamente si avvicina alla coincidenza con l'asse medio di momento principale, ma non coincide mai attualmente con esso. Esso si avvicina all'estremo negativo o positivo dell'asse medio secondo che i valori iniziali di ω_1, ω_3 hanno segni simili o dissimili.

181. *Trovare il movimento del corpo nello spazio.* Il cono che la linea invariabile OG descrive nel corpo diviene uno dei due piani
$$\sqrt{\frac{A-B}{A}}\cdot x=\pm\sqrt{\frac{B-C}{C}}\,z.$$

Essendo $\frac{z}{x}=\frac{C\omega_3}{A\omega_1}$ si deve prendere il segno superiore o l'inferiore secondo che i valori iniziali di ω_1, ω_3 hanno segni simili o dissimili. Tutti e due questi piani passano per l'asse medio, e sono indipendenti dalle condizioni iniziali eccetto in quanto che $G^2=BT$. Questi piani sono le sezioni circolari dell'ellissoide di girazione. Inoltre siccome essi sono rispettivamente perpendicolari agli assi dei due cilindri retti circolari che inviluppano l'ellissoide dei momenti, essi sono perpendicolari agli asintoti della conica focale dell'ellissoide dei momenti che giace nel piano dei momenti massimo e minimo.

Il movimento è perciò tale che un piano fisso nel corpo, cioè una delle sezioni circolari dell'ellissoide di girazione, contiene una linea fissa nello spazio, cioè la perpendicolare al piano della coppia impulsiva. Poichè il corpo passa da una posizione qualunque nella seguente con una velocità angolare $\omega\cos IOG=\frac{T}{G}$ intorno ad OG, ed una velocità angolare $\omega\operatorname{sen} IOG$ intorno ad una perpendicolare ad OG, ne segue che il piano fisso nel corpo

gira intorno alla linea fissa nello spazio con una velocità angolare uniforme eguale a $\frac{T}{G}$ o $\frac{G}{B}$. Nello stesso tempo il piano si muove in modo che la linea fissa nello spazio sembra descrivere il piano con una velocità variabile. Se β è l'angolo che OG fa con l'asse del momento medio questa velocità sarà $\frac{d\beta}{dt}$. Abbiamo

$$\cos\beta = \frac{B\omega_2}{G},$$

quindi per l'Art. 180

$$\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta} = Ee^{\mp\frac{2G}{B}nt};$$

onde
$$\cot\frac{\beta}{2} = \sqrt{E}\cdot e^{\mp\frac{G}{B}nt},$$

e da questa troviamo facilmente

$$\frac{d\beta}{dt} = \mp\frac{G}{B}n\cdot \operatorname{sen}\beta,$$

che dà la velocità richiesta.

182. L'asse OB descriva un arco BB' sopra una sfera qualunque fissa nello spazio col centro in O, nel tempo dt. Allora poichè BOG è il piano fisso nel corpo che gira intorno ad OG con una velocità angolare $\frac{G}{B}$ abbiamo $BGB' = \frac{G}{B}dt$. Sia $B'm$ un arco perpendicolare a GB. Allora se δ è l'angolo GBB', abbiamo

$$\cot\delta = \frac{Bm}{B'm} = \frac{d\beta}{\operatorname{sen}\beta\cdot BGB'} = \pm n,$$

che è costante. Quindi la traiettoria tracciata dall'asse del momento medio sopra una sfera col centro in O, è una linea di rombo che taglia tutt'i circoli massimi condotti per G sotto un angolo di cui la cotangente è $\pm n$. Si vedrà che n è la tangente dell'angolo che la poloide separatrice fa col piano GOB fisso nel corpo.

Supponiamo che ω_1, ω_3 abbiano inizialmente segni simili, allora $\cot\delta = n$ e la parte positiva dell'asse di momento medio si

allontanerà dalla linea invariabile, ed ultimamente la sua parte negativa tende a coincidere con la linea invariabile. Se ω_1, ω_3 hanno inizialmente segni diversi, allora $\cot\delta=-n$ e la parte positiva dell' asse di momento medio ultimamente si avvicina alla linea invariabile.

183. Il cono descritto da OH nel corpo è il cono reciproco di quello descritto da OG, e da esso possiamo dedurre teoremi reciproci. Quando $G^2=BT$ questo cono diviene una delle due linee rette di cui le equazioni sono

$$\left.\begin{array}{c} x\sqrt{\dfrac{1}{C}-\dfrac{1}{B}}=\pm z\sqrt{\dfrac{1}{B}-\dfrac{1}{A}} \\ y=0 \end{array}\right\}.$$

Queste sono perpendicolari alle sezioni circolari dell' ellissoide di girazione, e sono gli asintoti della conica focale dell'ellissoide dei momenti. Il movimento è perciò tale che una linea retta fissa nel corpo descrive un piano fisso nello spazio, cioè il piano invariabile. La linea retta si muove lungo questo piano con una velocità angolare uniforme eguale a $\frac{T}{G}$ o $\frac{G}{B}$. E per lo stesso ragionamento come sopra (Art. 181) la velocità angolare del corpo intorno a questa linea è $\pm\frac{G}{B}n\,\text{sen}\beta$, dove β è l' angolo che il piano condotto per gli assi di momento d' inerzia massimo e minimo fa col piano invariabile.

184. Il cono che l' asse istantaneo descrive nel corpo diviene anche uno dei due piani

$$\sqrt{A(A-B)}\,x=\pm\sqrt{C(B-C)}\,z,$$

dove, essendo $\frac{x}{\omega_1}=\frac{z}{\omega_3}$, si deve prendere il segno superiore o l' inferiore secondo che i valori iniziali di ω_1, ω_3, hanno o non hanno lo stesso segno. Questi piani sono fissi nel corpo, essendo indipendenti dalle condizioni iniziali, eccetto che $G^2=BT$. Essi sono perpendicolari ai diametri umbilicali dell' ellissoide di girazione, e sono i piani diametrali degli asintoti della conica focale nell' ellissoide dei momenti.

185. Le relazioni scambievoli dei diversi piani fissi nel corpo si possono illustrare con la figura seguente. Siano A,B,C i punti

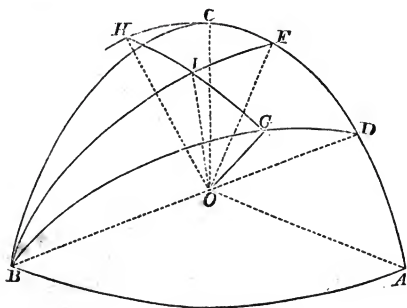
in cui gli assi principali del corpo intersegano una sfera col centro in O. Si conducano i piani BE, BD che sono rispettivamente descritti dall'asse istantaneo OI e dalla linea invariabile OG; allora per ciò che precede,

$$\tan CD = \sqrt{\frac{A}{C} \cdot \frac{B-C}{A-B}},$$

$$\tan CE = \sqrt{\frac{C}{A} \cdot \frac{B-C}{A-B}};$$

e quindi

$$\tan ED = \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}} = n.$$

Sia OH la linea fissa nel corpo perpendicolare al piano OBD sicchè H è il polo del circolo massimo BD. Allora I è l'intersezione di HG e BE per l'Art. 174. Quindi, conoscendo dalla investigazione precedente il valore di $BG = \beta$, gli altri angoli si possono trovare con la Trigonometria sferica.

Così dal triangolo rettangolo BGI, abbiamo

$$\cos B = \tan BG \cdot \cot BI,$$

onde
$$\tan BI = \tan \beta \cdot \sqrt{1+n^2};$$

che determina il movimento angolare dell'asse istantaneo lungo la poloide separatrice.

186. L'asse istantaneo descrive anche un cono nello spazio, la di cui equazione si può trovare nel modo seguente:

Sia φ l'angolo che il piano IOG fa al tempo t con un piano fisso nello spazio che passa per OG. Allora, se nel tempo ∂t I passa in I', $d\varphi = IGI'$. Poichè il corpo gira intorno ad OI con una velocità angolare ω, H che è fisso nel corpo passa nello stesso tempo in H', dove $HH' = \mathrm{sen}\, HI\, \omega dt$. Ma H', I', G sono sempre in un arco di circolo massimo; quindi

$$d\varphi = \mathrm{sen}\, HI \cdot \omega dt = \frac{G}{B} dt;$$

onde
$$\varphi = \frac{G}{B} t + F,$$

dove F è una costante. Perciò il piano che contiene l'asse istantaneo e la linea invariabile si muove con uniforme velocità angolare intorno alla linea invariabile.

Sia θ l'angolo che l'asse istantaneo fa con la linea invariabile. Dal triangolo sferico rettangolo BGI,

$$\mathrm{sen}\,\beta = \tan\theta \cdot \cot ED.$$

Ma
$$\cot\frac{\beta}{2} = \sqrt{E} \cdot e^{\mp\frac{G}{B} nt};$$

onde
$$\frac{2n}{\tan\theta} = \frac{2}{\mathrm{sen}\,\beta} = \cot\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}$$
$$= \sqrt{E} \cdot e^{\mp n(\varphi - F)} + \frac{1}{\sqrt{E}} e^{\pm n(\varphi - F)}.$$

Scegliamo il piano iniziale dal quale si misura φ in modo che $\sqrt{E} \cdot e^{\mp nF} = 1$, allora l'equazione del cono descritto nello spazio dall'asse istantaneo è

$$\frac{2n}{\tan\theta} = e^{n\varphi} + e^{-n\varphi},$$

quando $\varphi = 0$, abbiamo $\tan\theta = n$ o $\theta = DE$. Quindi il piano fisso nello spazio dal quale si misura φ è il piano che contiene gli assi di momento massimo e minimo al tempo in cui quel piano contiene la linea invariabile.

Movimento quando A=B.

187. *Determinare il movimento del corpo quando due dei momenti principali nel punto fisso sono eguali.*

Sia messo il corpo in rotazione con una velocità angolare ω intorno ad un asse istantaneo OI, che fa un angolo α con OC l'asse di figura. Sia OG la perpendicolare sul piano invariabile.

L'ellissoide dei momenti diviene in questo caso uno sferoide, l'asse del quale è l'asse del corpo di momento disuguale. Dalla simmetria della figura è evidente che rotolando lo sferoide sul piano invariabile, gli angoli GOC, GOI sono *costanti*, e che i tre assi OI, OG, OC sono sempre in un piano.

Per l'Art. 158 i coseni di direzione di OG sono proporzionali ad $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$. Quindi se β è l'angolo che OG fa con OC, abbiamo

$$\cos\beta = \frac{C\omega_3}{\sqrt{A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2}}.$$

Ma $\omega_1^2+\omega_2^2=\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha$ ed $\omega_3^2=\omega^2\cos^2\alpha$, quindi

$$\cos\beta = \frac{C\cos\alpha}{\sqrt{A\operatorname{sen}^2\alpha + C\cos^2\alpha}}.$$

La velocità angolare del corpo intorno ad OI varia come il raggio vettore OI dello sferoide, ed è perciò costante. Quindi OI descrive un cono retto nel corpo intorno ad OC con una velocità angolare uniforme, ed un cono retto nello spazio intorno ad OG con una velocità angolare uniforme.

La velocità angolare v di OI intorno ad OC nel corpo si può trovare molto prontamente riferendoci alle equazioni originali del movimento nell'Art. 91. Abbiamo in questo caso

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} - n\frac{A-C}{A}\omega_2 = 0 \\ \frac{d\omega_2}{dt} + n\frac{A-C}{A}\omega_1 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Risolvendo queste nel modo ordinario abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= F\cos\left(\frac{A-C}{A}nt+f\right) \\ \omega_2 &= -F\operatorname{sen}\left(\frac{A-C}{A}nt+f\right) \end{aligned}\right\},$$

dove F ed f sono costanti arbitrarie. Sia χ l'angolo che la proie-

zione dell'asse istantaneo sul piano perpendicolare ad OC fa con la linea retta fissa che è stata presa per l'asse OA, allora

$$\tan\chi = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \text{e} \quad \nu = \frac{d\chi}{dt};$$

quindi

$$\chi = \frac{C-A}{A}nt + f;$$

$$\nu = \frac{C-A}{A}n,$$

dove $n=\omega\cos\alpha$ è la velocità angolare intorno all'asse di figura.

La velocità angolare ν' di OI intorno ad OG nello spazio si può trovare con la considerazione che OC, OI, OG sono sempre in un piano. Si descriva una sfera intorno ad O come centro che intersega OC, OL in C ed L. Lo spostamento CC' di C nel tempo dt dovuto alla velocità angolare ω intorno ad I è $\omega \operatorname{sen}\alpha\, dt$. Quindi $\omega \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} dt$ è l'angolo compreso dai due archi CG, $C'G$ sulla sfera. Ma, poichè OC, OI, OG sono sempre in un piano, questa è la velocità angolare di OI intorno ad OG. Quindi

$$\nu' = \omega \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$$
$$= \omega \frac{\sqrt{A^2 \operatorname{sen}^2\alpha + C^2\cos^2\alpha}}{A}.$$

Sui Corpi correlativi e contrarelativi.

188. *Paragonare i movimenti di diversi corpi sollecitati dalla stessa coppia iniziale.*

Siano (α, β, γ) gli angoli che gli assi principali OA, OB, OC di un corpo nel punto fisso fanno con la linea invariabile OG. Abbiamo veduto nell'Art. 177 che le equazioni di Eulero si possono mettere nella forma

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} - G\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\cos\beta\cos\gamma = 0 \;\ldots\ldots\ldots (1),$$

e due simili equazioni.

Siano (λ, μ, ν) gli angoli che i piani GOA, GOB, GOC fanno con un piano qualunque fisso nello spazio e che passa per OG. Allora

$$\operatorname{sen}^2\alpha \frac{d\lambda}{dt} = \frac{T}{G} - \frac{G\cos^2\alpha}{A}.$$

Ma siccome la forza viva di un corpo sarà diversa da quella di un altro corpo messo in movimento dalla stessa coppia, sarà conveniente di sostituire per T il suo valore

$$\frac{T}{G^2} = \frac{\cos^2\alpha}{A} + \frac{\cos^2\beta}{B} + \frac{\cos^2\gamma}{C},$$

onde abbiamo

$$\frac{d\lambda}{dt} = G \frac{\dfrac{\cos^2\beta}{B} + \dfrac{\cos^2\gamma}{C}}{\cos^2\beta + \cos^2\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

e due simili equazioni.

Se con lettere accentate si dinotano le analoghe quantità per un altro corpo, le equazioni del moto saranno

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\cos\alpha'}{dt} - G'\left(\frac{1}{B'} - \frac{1}{C'}\right)\cos\beta'\cos\gamma' &= 0 \\ \text{etc.} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda'}{dt} &= G' \frac{\dfrac{\cos^2\beta'}{B'} + \dfrac{\cos^2\gamma'}{C'}}{\cos^2\beta' + \cos^2\gamma'} \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Se quindi i corpi sono tali che

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{A'} = \frac{1}{B} - \frac{1}{B'} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C'} = \frac{1}{\Delta},$$

e sono messi in movimento da coppie impulsive eguali $G' = G$, le equazioni (1) per trovare (α, β, γ) sono le stesse che le (3) per trovare $(\alpha', \beta', \gamma')$. Quindi se questi due corpi sono situati inizialmente con i loro assi principali paralleli, e sono messi in movimento da coppie impulsive eguali in grandezza e parallele in posizione, allora scorso un tempo qualunque t gli assi principali dei due corpi saranno sempre egualmente inclinati all' asse della coppia. Inoltre dalle equazioni (2) e (4), abbiamo

$$\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{d\mu}{dt} - \frac{d\mu'}{dt} = \frac{d\nu}{dt} - \frac{d\nu'}{dt} = \frac{G}{\Delta},$$

sicchè il parallelismo degli assi principali si può rimettere girando il corpo, di cui i momenti principali A', B', C' sono i più grandi dei due, intorno all' asse della coppia per un angolo $\frac{G}{\lambda} t$ nella direzione nella quale agiva la forza impulsiva.

Gli ellissoidi dei momenti di questi corpi sono chiaramente confocali, ed i corpi stessi si dicono essere correlativi.

Ancora, se i due corpi sono tali che

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{A'}=\frac{1}{B}+\frac{1}{B'}=\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}=\frac{1}{\Delta},$$

e sono messi in movimento da coppie impulsive eguali ed opposte $G'=-G$, le equazioni (1) e (3) sono di nuovo identiche, e con lo stesso ragionamento come sopra

$$\frac{d\lambda}{dt}-\frac{d\lambda'}{dt}=\text{etc.}=\frac{G}{\Delta}.$$

Quindi se questi due corpi sono inizialmente situati con i loro assi principali paralleli, e sono messi in movimento da coppie impulsive eguali ed opposte, allora alla fine di un tempo qualunque gli assi principali saranno tuttora egualmente inclinati all'asse della coppia, ed il parallelismo si può rimettere girando ciaschedun corpo per un angolo $\frac{G}{\Delta}t$, in una direzione opposta a quella della coppia che agiva su quel corpo.

Gli ellissoidi dei momenti di questi corpi sono contrafocali, cioè hanno la *somma* dei quadrati di due diametri principali qualunque la stessa in ciascun ellissoide. I corpi stessi si dicono essere contrarelativi.

189. *Paragonare le velocità angolari ad un istante qualunque di due corpi correlativi o contrarelativi.*

Sia ω la velocità angolare di un corpo ad un istante qualunque, allora seguendo la solita notazione abbiamo

$$\begin{aligned}\omega^2&=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\\&=G^2\left\{\frac{\cos^2\alpha}{A^2}+\frac{\cos^2\beta}{B^2}+\frac{\cos^2\gamma}{C^2}\right\}.\end{aligned}$$

Se le stesse lettere accentate dinotano le quantità analoghe per l'altro corpo, abbiamo

$$\omega'^2=G^2\left\{\frac{\cos^2\alpha}{A'^2}+\frac{\cos^2\beta}{B'^2}+\frac{\cos^2\gamma}{C'^2}\right\};$$

onde $$\omega'^2-\omega^2=G^2\left\{\cos^2\alpha\left(\frac{1}{A'^2}-\frac{1}{A^2}\right)+\cos^2\beta\left(\frac{1}{B'^2}-\frac{1}{B^2}\right)+\cos^2\gamma\left(\frac{1}{C'^2}-\frac{1}{C^2}\right)\right\}.$$

Se i corpi sono correlativi, questa diviene

$$\omega'^2 - \omega^2 = \frac{G^2}{\Delta}\left\{\cos^2\alpha\left(\frac{1}{A'}+\frac{1}{A}\right)+\cos^2\beta\left(\frac{1}{B'}+\frac{1}{B}\right)\right.$$
$$\left.+\cos^2\gamma\left(\frac{1}{C'}+\frac{1}{C}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\Delta}(T'+T),$$

dove T è la forza viva iniziale di un corpo e T' quella dell'altro.

Se i corpi sono contrarelativi, possiamo mostrare nello stesso modo che

$$\omega'^2 - \omega^2 = \frac{1}{\Delta}(T'-T).$$

In tutti e due i casi la differenza dei quadrati delle velocità angolari ad un istante qualunque è sempre la stessa.

Possiamo anche mostrare che $T' \mp T = \frac{G^2}{\Delta}$, prendendosi il segno superiore o l'inferiore secondo che i corpi sono correlativi o contrarelativi.

190. Quando un corpo gira intorno ad un punto fisso il suo movimento nello spazio è rappresentato facendo che il suo ellissoide dei momenti rotoli sopra un piano fisso. Questo non dà alcuna rappresentazione del *tempo* scorso nel passare il corpo da una posizione ad un'altra. Gli articoli precedenti ci abiliteranno a supplire a questo difetto.

Per dare distinzione alle nostre idee supponiamo che l'ellissoide dei momenti rotoli sopra un piano orizzontale al di sotto del punto fisso O, e che l'asse istantaneo OI descriva una poloide intorno all'asse di A. Togliamo ora quella metà dell'ellissoide che è limitata dal piano di BC, e che non tocca il piano fisso. Rimpiazziamo questa metà con la metà di un altro ellissoide più piccolo confocale col primo. Si conduca un piano parallelo al piano invariabile che tocchi questi ellissoidi in I' e supponiamo che questo piano sia anche fisso nello spazio. Questi due semiellissoidi si possono considerare come gli ellissoidi dei momenti di due corpi correlativi. Se essi non fossero congiunti tra loro e fossero liberi di muoversi senza interferenza, ciascuno rotolerebbe, l'uno sul piano fisso che tocca in I, e l'altro su quello che tocca in I'. Per quello che si è dimostrato l'ellissoide supe-

riore (essendo il più piccolo) può essere condotto al parallelismo con l'inferiore per mezzo di una rotazione $\frac{G}{\Delta}t$ intorno alla linea invariabile. Se quindi il piano superiore sul quale rotola l'ellissoide superiore si fa girare intorno alla linea invariabile come un asse fisso con una velocità angolare $\frac{G}{\Delta}$, i due ellissoidi saranno sempre in uno stato di parallelismo, e si possono supporre rigidamente connessi tra loro.

Supponiamo allora che il piano tangente superiore sia perfettamente scabro e capace di girare in un piano orizzontale intorno all'asse verticale che passa pel punto fisso. Facendo rotolare il nucleo con la parte inferiore della sua superficie sul piano fisso inferiore, l'attrito tra la parte superiore ed il piano farà girare quest'ultimo intorno al suo asse. Allora il tempo scorso sarà in un rapporto costante a questo movimento di rotazione, il quale si può misurare su di un quadrante di orologio assolutamente fisso immediatamente al di sopra del piano rotante.

La teoria precedente è presa da una memoria del Prof. Sylvester nelle *Transazioni Filosofiche* per l'anno 1866. Egli passa ad investigare in quali casi l'ellissoide superiore si può ridurre ad un disco. Pare che vi siano sempre due di questi dischi e non più, eccetto il caso in cui due dei momenti principali sono eguali, allora la soluzione diviene unica. Di questi due dischi uno è correlativo e l'altro contrarelativo al dato corpo, ed essi saranno rispettivamente perpendicolari agli assi di momenti d'inerzia massimo e minimo.

Poinsot ha mostrato che il movimento del corpo si può costruire per mezzo di un cono fisso nel corpo che rotola su di un piano il quale gira uniformemente intorno alla linea invariabile. Se, come nella teoria precedente, supponiamo il piano scabro, e sia messo in giro dal cono mentre esso rotola sul piano, l'angolo percorso dal piano misurerà il tempo trascorso.

ESEMPII.

1. Un punto P si muove lungo una poloide tracciata su di un ellissoide, mostrare che la lunghezza della normale tra P ed uno qualunque dei piani principali nel centro è costante. Mostrare inoltre che la normale descrive sopra un piano principale una conica simile alla conica focale in quel piano. Di più la misura della curvatura di un ellissoide lungo una poloide qualunque è costante.

2. Nell' erpoloide $\frac{2mb}{r} = e^{m\theta} + e^{-m\theta}$, dove

$$m^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{b^2},$$

se si trova il luogo delle estremità della sottangente polare di questa curva e si genera similmente un'altra curva da questo luogo, la curva così ottenuta sarà simile all' erpoloide.

3. Se un cono retto circolare la di cui altezza a è il doppio del raggio della sua base gira intorno al suo centro di gravità come un punto fisso, ed è originalmente messo in movimento intorno ad un asse inclinato sotto un angolo α all' asse di figura, il vertice del cono descriverà un circolo di raggio $\frac{3}{4} a \operatorname{sen} \alpha$.

4. Un piatto circolare gira intorno al suo centro di gravità come un punto fisso. Se una velocità angolare ω è originalmente impressa su di esso intorno ad un asse che fa un angolo α col suo piano, una normale al piano del disco farà una rivoluzione nello spazio nel tempo $\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2\alpha}}$.

5. Se un solido di rotazione si muove intorno al suo centro di gravità fisso, mostrare che il piano condotto per l' asse di figura e per l' asse istantaneo gira uniformemente intorno ad una linea nel piano stesso e che questi assi non possono essere egualmente inclinati a questa linea a meno che non sia $C > 2A$, ed in quel caso l'inclinazione eguaglia $\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{A}{C-A}$, C essendo il momento d' inerzia intorno all' asse di figura, ed A quello intorno alla retta perpendicolare ad esso.

6. Un cono retto di base ellittica è sostenuto in G il centro di gravità, ed ha un movimento comunicato ad esso intorno ad un asse condotto per G perpendicolare alla linea che congiunge G e l' estremità B dell' asse minore della base, e nel piano che passa per B e per l' asse del cono. Determinare la posizione del piano invariabile.

Risultato. La normale al piano invariabile giace nel piano che passa per l' asse del cono e per l' asse d' istantanea rotazione, e fa un angolo $\tan^{-1} \frac{b}{16h} \cdot \frac{h^2+4a^2}{a^2+b^2}$.

7. Uno sferoide ha un elemento di massa m attaccato a ciascu-

na estremità dell'asse di rivoluzione, ed il centro di gravità è fisso. Se il corpo è messo in rotazione intorno ad un asse qualunque, mostrare che lo sferoide rotolerà sopra un piano fisso durante il movimento purchè sia $\frac{m}{M}=\frac{1}{10}\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)$ dove M è la massa dello sferoide, d e c sono gli assi dell'ellisse generatrice, c essendo l'asse di figura.

8. Una lamina di forma qualunque che rota con una velocità angolare α intorno ad un asse condotto pel suo centro di gravità perpendicolare al suo piano ha impressa una velocità angolare $\alpha\sqrt{\frac{B+C}{B-C}}$ intorno al suo asse principale di momento minimo, A, B, C essendo disposti in ordine decrescente di grandezza; mostrare che ad un tempo qualunque t le velocità angolari intorno agli assi principali sono rispettivamente

$$\frac{2\alpha}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}},\quad -\sqrt{\frac{B+C}{B-C}}\,\alpha\,\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}},\quad \text{e}\quad \sqrt{\frac{B+C}{B-C}}\,\frac{2\alpha}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}},$$

e che essa girerà ultimamente intorno all'asse di momento medio.

9. Un corpo rigido non sollecitato da alcuna forza è in movimento intorno al suo centro di gravità: dimostrare che se l'asse istantaneo è in un istante qualunque situato nel piano di contatto di ciascuno dei cilindri circolari retti descritti intorno all'ellissoide centrale, accadrà così durante il moto.

Se a, b, c sono i semiassi dell'ellissoide centrale disposti in ordine decrescente di grandezza, e_1, e_2, e_3 le eccentricità delle sue sezioni principali, Ω_1, Ω_2, Ω_3 le componenti della velocità angolare iniziale del corpo intorno ai suoi assi principali, dimostrare che la condizione affinchè l'asse istantaneo sia situato nel piano sopra descritto è $\frac{\Omega_1}{e_1}=\frac{ab}{c^2}\frac{\Omega_3}{e_3}$.

10. Una lamina rigida non sollecitata da alcuna forza ha un punto fisso intorno al quale essa può girare liberamente. Essa incomincia a muoversi intorno ad una linea nel piano della lamina rispetto alla quale il momento d'inerzia è Q. Mostrare che il rapporto della massima alla minima velocità angolare è $\sqrt{A+Q}$: $\sqrt{B+Q}$ dove A e B sono i momenti principali d'inerzia rispetto agli assi nel piano della lamina.

11. Se la terra fosse un corpo rigido non sollecitato da alcuna forza che gira intorno ad un diametro il quale non è un asse

principale, mostrare che le latitudini dei luoghi varierebbero e che ritornerebbero gli stessi valori sempre che $\sqrt{A-B}\sqrt{A-C}\int \omega_1 dt$ fosse un multiplo di $2\pi\sqrt{BC}$. Se un uomo dovesse giacere quando la sua latitudine è un minimo ed alzarsi quando essa diviene un massimo, mostrare che egli aumenterebbe la forza viva e così farebbe muovere un polo della terra dall'asse di momento d'inerzia massimo verso quello di momento d'inerzia minimo.

12. Se si tira un piano per il punto fisso parallelo al piano invariabile, dimostrare che l'area della sezione dell'ellissoide dei momenti tagliata da questo piano è costante durante il moto.

13. Se tiriamo tre linee rette OA, OB, OC secondo gli assi principali nel punto fisso O di lunghezze eguali, la somma delle aree conservate da queste linee sul piano invariabile è proporzionale al tempo.

14. Se le lunghezze OA, OB, OC sono proporzionali ai raggi di girazione intorno agli assi rispettivamente, la somma delle aree conservate da queste linee sul piano invariabile sarà anche proporzionale al tempo.

15. La somma dei quadrati delle distanze delle estremità dei diametri principali dell'ellissoide dei momenti dalla linea invariabile è costante durante il moto.

16. Se delle linee rette si misurano lungo i tre assi principali del corpo dal punto fisso, ed inversamente proporzionali ai raggi di girazione intorno a quegli assi, la somma dei quadrati delle velocità delle loro estremità è costante durante il moto.

17. Un corpo si muove intorno ad un punto fisso O non sollecitato da alcuna forza. Mostrare che se la superficie $Ax^2+By^2+Cz^2=(x^2+y^2+z^2)^2$ si traccia nel corpo, gli assi principali in O essendo gli assi delle coordinate, questa superficie durante il moto rotolerà sopra una sfera fissa.

18. Se $d\theta$ è l'angolo tra due posizioni consecutive dell'asse istantaneo, dimostrare che

$$\omega^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\omega_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\omega_3}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

19. La lunghezza tra due suoi apsidi successivi della spirale, descritta nello spazio assoluto, sulla superficie di una sfera fissa concentrica, dall'asse istantaneo di rotazione, è eguale ad un quadrante dell'ellisse sferica descritta dallo stesso asse sopra

una sfera eguale che si muove col corpo. Questo è il Teorema di Booth.

20. Un corpo è messo in rotazione con una velocità angolare iniziale n intorno ad un asse che molto prossimamente coincide con un asse principale OC nel punto fisso O. Il movimento dell'asse istantaneo nel corpo si può trovare con le formole seguenti. Si descriva una sfera col centro in O, e sia I l'estremità del raggio vettore che è l'asse istantaneo al tempo t. Se (x, y) sono le coordinate della proiezione di OI sul piano AOB riferita agli assi principali OA, OB, allora

$$x = \sqrt{B(B-C)}\, L \operatorname{sen}(pnt + M),$$

$$y = \sqrt{A(A-C)}\, L \cos(pnt + M),$$

dove $p^2 = \dfrac{(B-C)(A-C)}{AB}$, ed L, M sono due costanti arbitrarie che dipendono dai valori iniziali di x, y.

21. Se nell'ultima questione G è il punto in cui la sfera interseca la linea invariabile, e se (ρ, θ) sono le coordinate polari sferiche di C rispetto a G come origine, allora

$$\rho^2 = \frac{AB}{2G^2} L^2 \left\{2AB - C(A+B) + (A-B)\, C \cos 2(pnt + M)\right\},$$

$$\theta = \frac{G}{C} t + \frac{CT - G^2}{CG} \int \frac{dt}{\rho^2}.$$

22. Un corpo che può girare liberamente intorno ad un punto fisso nel quale due dei momenti principali sono eguali e minori del terzo, è messo in rotazione intorno ad un asse qualunque. Per la resistenza dell'aria ed altre cause, esso è continuamente sollecitato da una coppia ritardatrice il di cui asse è l'asse istantaneo di rotazione e di cui la grandezza è proporzionale alla velocità angolare. Mostrare che l'asse di rotazione tenderà continuamente a coincidere con l'asse di momento disuguale. Nel caso della terra perciò, una vicina coincidenza dell'asse di rotazione e dell'asse di figura non è una pruova che tale coincidenza vi sia sempre stata.

23. Se due corpi sono in relazione tale che i loro ellissoidi di girazione siano confocali, e sono inizialmente situati in modo che gli angoli (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ che i loro assi principali fanno

con la linea invariabile di ciascuno siano legati dalle equazioni

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{A}}=\frac{\cos\alpha'}{\sqrt{A'}},\quad \frac{\cos\beta}{\sqrt{B}}=\frac{\cos\beta'}{\sqrt{B'}},\quad \frac{\cos\gamma}{\sqrt{C}}=\frac{\cos\gamma'}{\sqrt{C'}},$$

e se questi corpi sono messi in movimento da due coppie impulsive G, G' tali che $G\sqrt{ABC}=G'\sqrt{A'B'C'}$; allora le relazioni precedenti avranno sempre luogo tra gli angoli (α,β,γ), (α',β',γ'). Inoltre $\frac{BC}{G}\frac{d\lambda}{dt}-\frac{B'C'}{G'}\cdot\frac{d\lambda'}{dt}$ sarà costante durante il moto, dove λ, λ', etc., sono gli angoli che i piani GOA, $G'O'A'$ fanno al tempo t con le loro posizioni al tempo $t=0$.

24. Un ellissoide, il di cui centro O è fisso, si contrae pel raffreddamento ed essendo messo in movimento in un modo qualunque non è sollecitato da alcuna forza. Trovare il moto.

CAPITOLO X.

Precessione e Nutazione, etc. etc.

Sul Potenziale.

191. *Trovare il potenziale di un corpo di forma qualunque in un punto qualunque esterno lontano.*

Il centro di gravità G del corpo si prenda come origine delle coordinate e l'asse delle x passi pel punto esterno S. Sia la distanza $GS=\rho$. Siano (x, y, z) le coordinate di un elemento qualunque dm del corpo situato in un punto qualunque P e sia $GP=r$. Allora il potenziale del corpo è

$$V=\Sigma\frac{dm}{PS}.$$

Ora
$$PS^2=\rho^2+r^2-2\rho x;$$

onde
$$V=\Sigma\frac{dm}{\rho}\left\{1-\frac{2\rho x-r^2}{\rho^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\Sigma\frac{dm}{\rho}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{2\rho x-r^2}{\rho^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{2\rho x-r^2}{\rho^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{5}{16}\left(\frac{2\rho x-r^2}{\rho^2}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{2\rho x-r^2}{\rho^2}\right)^4+\ldots\right\},$$

ordinando questi termini secondo le potenze discendenti di ρ, otteniamo

$$V=\Sigma\frac{dm}{\rho}\left\{1+\frac{x}{\rho}+\frac{3x^2-r^2}{2\rho^2}+\frac{5x^3-3xr^2}{2\rho^3}\right.$$
$$\left.+\frac{35x^4-30x^2r^2+3r^4}{8\rho^4}+\ldots\right\}.$$

Sia M la massa del corpo, allora $\Sigma dm=M$.

Inoltre poichè l'origine è al centro di gravità, abbiamo $\Sigma x dm=0$.

Siano A, B, C i momenti principali d'inerzia al centro di gravità, I il momento d'inerzia rispetto all'asse delle x, che nel no-

stro caso è la linea che unisce il centro di gravità del corpo al punto attratto. Allora

$$\Sigma dmr^2 = \frac{1}{2}(A + B + C),$$

$$\Sigma dmx^2 = \Sigma dm\,(r^2 - y^2 - z^2),$$

$$= \frac{1}{2}(A + B + C) - I.$$

Sia l una dimensione lineare qualunque del corpo, allora se ρ è così grande paragonato con l che possiamo trascurare la frazione $\left(\frac{l}{\rho}\right)^3$ del potenziale, abbiamo

$$V = \frac{M}{\rho} + \frac{A + B + C - 3I}{2\rho^3}.$$

Se vogliamo ottenere una maggiore approssimazione al valore di V, dobbiamo tener conto del termine seguente, cioè

$$\frac{5\Sigma mx^3 - 3\Sigma mxr^2}{2\rho^4}.$$

Siano (ξ, η, ζ) le coordinate di m riferito ad assi rettangolari fissi qualunque che hanno l'origine in G, e siano (α, β, γ) gli angoli che GS fa con questi assi. Allora

$$x = \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma;$$

onde $$\Sigma mx^3 = \cos^3\alpha\,\Sigma m\xi^3 + 3\cos^2\alpha\cos\beta\,\Sigma m\xi^2\eta + \ldots$$

Se il corpo è simmetrico rispetto ad un sistema di assi rettangolari che s'incontrano in G, abbiamo $\Sigma m\xi^3 = 0$, $\Sigma m\xi^2\eta = 0$, etc. $= 0$, sicchè questo termine seguente nell'espressione del potenziale svanisce del tutto. Così l'errore dell'espressione precedente di V è comparabile solamente alla frazione $\left(\frac{l}{\rho}\right)^4$ del potenziale. Questo è il caso della terra, la forma e la struttura della quale sono molto prossimamente simmetriche rispetto agli assi principali nel suo centro di gravità.

192. Nell'investigazione di questo valore del potenziale, si è supposto che S sia ad una distanza molto grande. Ma l'espressione è anche molto prossimamente esatta dovunque sia situato il punto S, purchè il corpo sia un ellissoide i di cui strati di eguale densità sono ellissoidi concentrici di piccola ellitticità.

Per dimostrare ciò, possiamo usare un teorema sull' attrazione dovuto a Maclaurin, cioè: I potenziali di ellissoidi confocali sopra un punto esterno qualunque sono proporzionali alle loro masse. Consideriamo da principio il caso di un ellissoide solido omogeneo. Si descriva un ellissoide confocale interno di dimensioni molto piccole e siano a', b', c' i suoi semiassi. Allora poichè l'ellitticità è molto piccola, possiamo prendere a', b', c' così piccoli che S si possa riguardare come un punto lontano rispetto all'ellissoide interno. Quindi il potenziale dovuto all'ellissoide interno è

$$V' = \frac{M'}{\rho} + \frac{A' + B' + C' - 3I'}{2\rho^3},$$

dove le lettere accentate hanno lo stesso significato relativamente all'ellissoide interno di quello delle lettere senza accento rispetto all' ellissoide dato. L'errore commesso in questa espressione è dell' ordine $\left(\frac{a'}{\rho}\right)^4 V'$.

Quindi, pel teorema di Maclaurin, il potenziale V del dato ellissoide è

$$V = \frac{M}{\rho} + \frac{M}{M'}\frac{A' + B' + C' - 3I'}{2\rho^3},$$

e l'errore è dell' ordine $\left(\frac{a'}{\rho}\right)^4 V$.

Se a, b, c sono i semiassi dell' ellissoide dato, abbiamo

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = \lambda^2;$$

onde

$$\begin{aligned} A &= M\frac{b^2 + c^2}{5} \\ &= M\left(\frac{b'^2 + c'^2}{5} + \frac{2}{5}\lambda^2\right) \\ &= \frac{M}{M'}A' + \frac{2}{5}M\lambda^2. \end{aligned}$$

Similmente,

$$B = \frac{M}{M'}B' + \frac{2}{5}M\lambda^2, \qquad C = \frac{M}{M'}C' + \frac{2}{5}M\lambda^2.$$

Inoltre se (α, β, γ) sono gli angoli di direzione della linea GS rispetto agli assi principali in G, abbiamo

$$\begin{aligned} I &= A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \\ &= \frac{M}{M'}I' + \frac{2}{5}M\lambda^2. \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo, abbiamo

$$V=\frac{M}{\rho}+\frac{A+B+C-3I}{2\rho^3},$$

Se a, b, c sono disposti in ordine decrescente di grandezza, possiamo diminuendo la grandezza dell'ellissoide interno rendere c' tanto piccolo quanto ci piace. In questo caso abbiamo ultimamente $a'=\sqrt{a^2-c^2}$. Sia ε l'ellitticità della sezione che contiene a e c i semiassi massimo e minimo. Allora $a'=a\sqrt{2\varepsilon}$, e l'errore dell'espressione precedente di V è dell'ordine $4\left(\frac{a}{\rho}\right)^4 \varepsilon^2 V$.

Il teorema essendo vero per un ellissoide solido omogeneo qualunque è anche vero per uno strato omogeneo qualunque limitato da ellissoidi concentrici di piccola ellitticità. Infatti il potenziale di un tale strato si può trovare sottraendo i potenziali degli ellissoidi che lo limitano, $A+B+C$ per l'Art. 6 essendo indipendente dalle direzioni degli assi.

Finalmente, supponiamo che il corpo sia un ellissoide i di cui strati di eguale densità sono ellissoidi concentrici di piccola ellitticità, il contorno esterno essendo omogeneo. Allora la proposizione essendo vera per ciascuno strato, è anche vera per l'intero corpo. Si vegga il *Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1851.*

193. La dimostrazione dei teoremi seguenti servirà come un esercizio sugli articoli precedenti.

(1) Se la legge di attrazione fosse $-\varphi$ (dist.) invece del quadrato inverso, il potenziale di un corpo sopra un punto qualunque esterno S sarebbe rappresentato da $\Sigma m\varphi_1(PS)$, dove $\varphi(\rho)$ è il coefficiente differenziale di $\varphi_1(\rho)$. In questo caso, ragionando nello stesso modo, otteniamo

$$V=M\varphi_1(\rho)+\varphi'(\rho)\frac{A+B+C}{4}-\frac{\rho}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\varphi(\rho)}{\rho}\right)I,$$

dove A, B, C ed I hanno gli stessi significati di sopra.

Se (x', y', z') sono le coordinate di S riferito agli assi principali in G, il momento dell'attrazione di S rispetto all'asse delle y è $=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\frac{\varphi(\rho)}{\rho}\cdot(C-A)x'z'$. Si vegga l'Art. 133.

(2) Se l'attrazione di un corpo sopra ogni punto esterno è la stessa di quella di un solo elemento situato in un punto, allora

la massa dell'elemento è eguale alla massa del corpo, il punto è il centro di gravità, ed a meno che la legge di attrazione non sia quella della distanza diretta, ogni asse condotto pel centro di gravità è un asse principale nel centro di gravità. Si vegga il *Quarterly Mathematical Journal*, 1857.

(3) Se due corpi della stessa massa hanno i loro centri di gravità coincidenti ed i loro ellissoidi di girazione nei loro centri di gravità *confocali*, e se essi attraggono uno stesso punto lontano qualunque secondo la legge di natura, le loro attrazioni sono le stesse in direzione e grandezza.

(4) Si descriva un ellissoide che ha i suoi semiassi a, b, c tali che

$$M\frac{2}{3}a^2=B+C-A+\lambda\,,\quad M\frac{2}{3}b^2=C+A-B+\lambda,\quad M\frac{2}{3}c^2=A+B-C+\lambda$$

dove λ è a nostra disposizione e può essere una quantità qualunque positiva o negativa che non rende a, b, c immaginarii. Si costruisca uno strato infinitamente sottile di massa M limitato da ellissoidi simili e che ha questo ellissoide per una delle superficie del contorno. Allora le attrazioni del corpo dato e di questo strato sopra un qualunque punto esterno lontano sono le stesse in direzione e grandezza.

(5) L'attrazione di un corpo di cui due dei momenti principali nel centro di gravità A e B sono eguali e maggiori del terzo attrae un punto lontano come se la sua massa fosse egualmente distribuita sopra una linea retta $\sqrt{3\frac{A-C}{M}}$ situata perpendicolarmente al piano di A, B col suo punto medio nel centro di gravità. Questa proposizione è accuratamente vera se il corpo è uno strato infinitamente sottile limitato da sferoidi allungati simili. In ogni caso è necessario che i momenti eguali A, B siano maggiori del terzo momento d'inerzia C.

(6) Qualunque siano le grandezze relative dei tre momenti principali d'inerzia, l'attrazione sopra un punto lontano è la stessa come se la massa fosse distribuita sulla conica focale dell'ellissoide descritto in (4) in modo che la densità in un punto qualunque P è proporzionale ad $\frac{AB}{\sqrt{AP \cdot PB}}$ dove AB è il diametro che passa per P.

194. *Trovare la funzione della Forza dovuta all'attrazione di un corpo qualunque sopra un qualunque altro corpo lontano.*

Siano G, G' i centri di gravità dei due corpi, e sia $GG'=R$.

Siano A, B, C; A', B', C' i momenti principali d'inerzia dei due corpi in G e G' rispettivamente; I, I' i momenti d'inerzia rispetto a GG', e siano M, M' le masse dei due corpi.

Sia m' un elemento qualunque del corpo M' situato nel punto S, e sia $GS = \rho$. Allora il potenziale del corpo M in m' è $m'\left\{\frac{M}{\rho} + \frac{A+B+C-3I_1}{3\rho^3}\right\}$, dove I_1 è il momento d'inerzia del corpo M rispetto a GS. Dobbiamo ora sommare questa espressione per tutt'i valori di m'. Questo dà

$$M\Sigma\frac{m'}{\rho} + \Sigma m'\frac{A+B+C-3I_1}{2\rho^3}.$$

Il primo termine con lo stesso ragionamento come sopra dà

$$\frac{MM'}{R} + M\frac{A'+B'+C'-3I'}{2R^3}.$$

Nel secondo termine, siano x', y', z' le coordinate di m' riferito a G' come origine. Allora

$$\rho = R\left(1 + \frac{x'}{R} + \text{quadrati di } x', y', z'\right)$$

$$I_1 = I(1 + \alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \text{quadrati}),$$

dove α, β, γ sono costanti. Sostituendo questi, e rammentando che $\Sigma m'x'=0$, $\Sigma m'y'=0$, $\Sigma m'z'=0$, otteniamo

$$M'\cdot\frac{A+B+C-3I}{2R^3}\left\{1 + \begin{pmatrix}\text{termini dipendenti dai}\\ \text{quadrati di } x', y', z'\end{pmatrix}\right\}.$$

Quindi la richiesta funzione della forza è

$$V = \frac{MM'}{R} + M\frac{A'+B'+C'-3I'}{2R^3} + M'\frac{A+B+C-3I}{2R^3}.$$

L'errore di questa espressione è dell'ordine $\left(\frac{l\,l'}{R^2}\right)^2 V$, dove l, l' sono dimensioni lineari qualunque dei due corpi rispettivamente.

195. *Trovare il momento dell'attrazione del sole e della luna rispetto ad uno degli assi principali della terra nel suo centro di gravità.*

Gli assi principali della terra nel suo centro di gravità si prendano come assi di riferimento, e siano α, β, γ gli angoli di di-

rezione del centro di gravità G' del sole. Allora se V è il potenziale del sole o della luna sulla terra, abbiamo

$$V=\frac{MM'}{R}+M\frac{A'+B'+C'-3I'}{2R^3}+M'\frac{A+B+C-3I}{2R^3},$$

dove le lettere senza accento si riferiscono alla terra e le lettere accentate al sole o alla luna. Se θ è l'angolo che il piano condotto pel sole e per l'asse delle y fa col piano delle xy, allora $\frac{dV}{d\theta}$ è il momento richiesto nella direzione nella quale dobbiamo girare il corpo per accrescere θ. Dall'espressione precedente, poichè θ entra solamente per I, abbiamo

$$\frac{dV}{d\theta}=-\frac{3}{2}\frac{M'}{R^3}\frac{dI}{d\theta}.$$

Ora $I=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma$, e per la Trigonometria sferica, abbiamo

$$\left.\begin{aligned}\cos\gamma&=\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta\\ \cos\alpha&=\operatorname{sen}\beta\cos\theta\end{aligned}\right\};$$

onde
$$\frac{dI}{d\theta}=-2(A-C)\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}\theta\cos\theta;$$

quindi il momento richiesto rispetto all'asse delle y $\Big\}=-3\frac{M'}{R^3}(C-A)\cos\alpha\cos\gamma.$

In questa espressione la massa del corpo attraente è misurata in unità astronomiche. Possiamo eliminare questa unità nel modo seguente. Sia n' la velocità media angolare del sole rispetto alla terra, R_0 la sua media distanza, sicchè se M è la massa della terra, abbiamo $\frac{M'+M}{R_0{}^3}=n'^2$. Ora M è molto piccola in paragone di M', così piccola che $\frac{M}{M'}$ è dell'ordine dei termini già trascurati. Quindi negli stessi termini possiamo porre $\frac{M'}{R_0{}^3}=n'^2$, e perciò

il momento dell'attrazione del sole rispetto all'asse delle y $\Big\}=-3n'^2(C-A)\cos\alpha\cos\gamma\left(\frac{R_0}{R}\right)^3.$

Sia n'' la velocità media angolare della luna rispetto alla terra, sicchè, se M'' è la massa della luna, R_0' la media distanza, abbiamo $\frac{M''+M}{R_0'^3}=n''^2$. Sia ν il rapporto della massa della terra

a quella della luna, allora abbiamo $\frac{M''(1+\nu)}{R_0'^3}=n''^2$, e perciò se R' è la distanza della luna

$$\left.\begin{array}{l}\text{il momento dell'attrazione della}\\ \text{luna rispetto all' asse delle } y\end{array}\right\}=-\frac{3n''^2}{1+\nu}(C-A)\cos\alpha\cos\gamma\left(\frac{R_0'}{R'}\right)^3.$$

Nello stesso modo si possono trovare i momenti rispetto agli altri assi. Ponendo $\varkappa$ per il coefficiente, abbiamo

momento rispetto all'asse delle $x=-\varkappa(B-C)\cos\beta\cos\gamma$,

momento rispetto all'asse delle $z=-\varkappa(A-B)\cos\alpha\cos\beta$.

Movimento della Terra intorno al suo centro di gravità.

196. *Trovare il movimento del polo della terra intorno al suo centro di gravità quando è perturbato dall'attrazione del sole e della luna, la figura della terra essendo supposta di rivoluzione.*

Consideriamo l'effetto di questi due corpi separatamente. Allora, purchè trascuriamo i termini che dipendono dal quadrato della forza perturbatrice, possiamo con l'addizione determinare l'insieme del loro effetto.

Il sole attrae le parti della terra più vicine con una forza leggermente maggiore di quella con la quale esso attrae le parti più lontane e così produce una piccola coppia che tende a girare la terra intorno ad un asse situato nel piano dell'equatore e perpendicolare alla linea che congiunge il centro della terra col centro del sole. È l'effetto di questa coppia che dobbiamo ora determinare. Essa evidentemente produce piccole velocità angolari rispetto ad assi perpendicolari all'asse di figura. Supporremo inoltre che l'asse iniziale di rotazione coincida così prossimamente con l'asse di figura, che si possano riguardare le velocità angolari rispetto ad assi situati nel piano dell'equatore piccole in paragone della velocità angolare rispetto all'asse di figura.

In primo luogo consideriamo l'orbita del corpo perturbatore fissa nello spazio. Ciò è molto prossimamente vero nel caso del sole, meno prossimamente per la luna. Questa limitazione del problema proposto si troverà che semplifica grandemente la soluzione. Possiamo ora scegliere come nostri assi di riferimento nello spazio, la normale a questo piano fisso, e due altri assi nel piano del movimento.

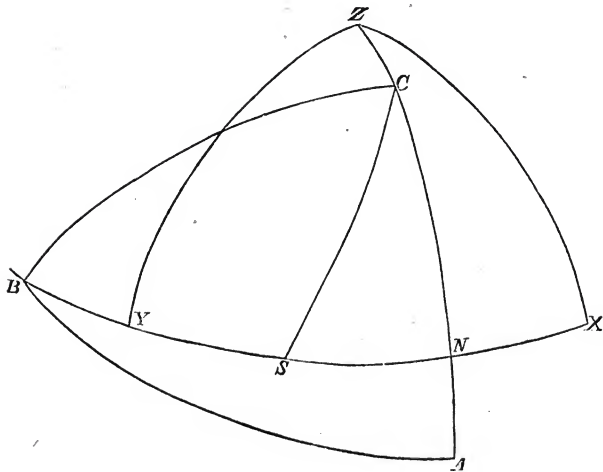
Prendiamo come assi di riferimento nella terra, GC l'asse di figura, GA, GB che si muovono nella terra in modo che il piano

AC sia sempre ad angoli retti al piano dell'orbita del corpo perturbatore. Allora seguendo la solita notazione, le equazioni della Nutazione sono per l'Art. 105,

$$\left.\begin{array}{r} A\left(\dfrac{d\omega_1}{dt}-\omega_2\dfrac{d\chi}{dt}\right)-(A-C)\,\omega_2\,\omega_3=L \\ A\left(\dfrac{d\omega_2}{dt}+\omega_1\dfrac{d\chi}{dt}\right)+(A-C)\,\omega_1\,\omega_3=M \\ C\dfrac{d\omega_3}{dt}=0 \end{array}\right\}\cdots\text{(I)}.$$

L'ultima di queste equazioni mostra che ω_3 è costante; si dinoti questo valore costante con n.

Nella figura sia NS il piano del movimento del corpo pertur-

batore, Z il suo polo, S il corpo che si muove nella direzione da N ad S, e la sua longitudine misurata *nella stessa direzione* da B, intersezione del suo piano di movimento con l'equatore, sia l. Sia $\theta=ZC$, e sia ψ l'angolo che ZC fa con un circolo massimo fisso ZX. Le equazioni geometriche saranno perciò

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega_2 \\ -\operatorname{sen}\theta\frac{d\psi}{dt} &= \omega_1 \\ -\frac{d\chi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\cos\theta &= \omega_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}.$$

Si vede dall'ultima di queste equazioni che $\frac{d\chi}{dt}$ differisce da $-\omega_3$ per una quantità dell'ordine ω_1. Quindi, siccome trascureremo i termini che dipendono dai quadrati e dai prodotti delle piccole quantità ω_1, ω_2, possiamo nei *piccoli termini* porre $\frac{d\chi}{dt}=-n$. Le equazioni del moto diventano ora

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt}+Cn\,\omega_2 &= L \\ A\frac{d\omega_2}{dt}-Cn\,\omega_1 &= M \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}.$$

I momenti L ed M sono stati trovati nell'Art. 195. Abbiamo scrivendo μ per il coefficiente,

$$\begin{aligned} M &= -\mu\cos\alpha\cos\gamma \\ &= -\mu\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2 SN \\ &= -\mu\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{1-\cos 2l}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Similmente}\qquad L=-\mu\operatorname{sen}\theta\frac{\operatorname{sen}2l}{2}\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}.$$

Per risolvere queste equazioni, dobbiamo sostituire per l il suo valore in termini di t. Poichè μ è così piccolo che il suo quadrato si deve trascurare, possiamo in *questa* sostituzione supporre che θ sia costante e che l sia misurata da un punto fisso nello spazio. Per la teoria del movimento ellittico, abbiamo

$$l=n't+\varepsilon'+2e'\operatorname{sen}(n't+\varepsilon'-\zeta)+\ldots$$

dove e', ε', ζ sono rispettivamente l'eccentricità, l'epoca e la longitudine del perigeo dell'orbita del corpo perturbatore. Si vedrà che se si effettua la sostituzione L ed M saranno espressi in una

serie di coseni e seni sicchè possiamo porre

$$\left.\begin{array}{l} L = \Sigma F \cos(\lambda t + j) \\ M = \Sigma G \operatorname{sen}(\lambda t + j) \end{array}\right\},$$

dove λ è un multiplo di n' ed è perciò piccolo.

Per trovare ω_1, ω_2 poniamo

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = \Sigma P \operatorname{sen}(\lambda t + j) \\ \omega_2 = \Sigma Q \cos(\lambda t + j) \end{array}\right\},$$

allora sostituendo troviamo facilmente

$$\left.\begin{array}{l} AP\lambda + CnQ = F \\ AQ\lambda + CnP = -G \end{array}\right\}.$$

I termini più importanti nei valori di L ed M sono quelli in cui $\lambda=0$ o $\lambda=2n'$. In tutti gli altri termini F e G contengono potenze di e'. Quindi essendo $\frac{n'}{n} = \frac{1}{365}$ possiamo considerare λ piccolo. È chiaro inoltre che quando sostituiamo nelle equazioni geometriche i valori di ω_1, ω_2 per trovare θ e ψ, nessun termine sorgerà nell'integrazione in cui λ non è piccolo. Abbiamo perciò molto prossimamente $Q = \frac{F}{Cn}$, $P = -\frac{G}{Cn}$, o sostituendo

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = -\dfrac{M}{Cn} \\ \omega_2 = \dfrac{L}{Cn} \end{array}\right\} \text{.................... (V).}$$

Il movimento quindi del polo della terra nello spazio riferito al polo dell'orbita del corpo perturbatore come origine è dato dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{\mu}{2Cn} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2l \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\mu}{2Cn} \cos\theta\,(1 - \cos 2l) \end{array}\right\} \text{........ (VI).}$$

197. In questa soluzione non abbiamo considerato ancora le

Funzioni Complementari. Per trovare queste dobbiamo risolvere

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} + Cn\omega_2 = 0 \\ A\frac{d\omega_2}{dt} - Cn\omega_1 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Troviamo facilmente

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \quad H \operatorname{sen}\left(\frac{Cn}{A}t + K\right) \\ \omega_2 &= - H \cos\left(\frac{Cn}{A}t + K\right) \end{aligned}\right\}.$$

Le quantità H e K dipendono dai valori iniziali di ω_1, ω_2. Siccome questi valori iniziali sono ignoti H e K si debbono determinare con l'osservazione. Se H avesse un valore sensibile si scoprirebbe per le variazioni prodotte da esso nella posizione nello spazio del polo della terra. Il periodo di queste sarebbe $\frac{2\pi}{n}\frac{A}{C}$, siccome A e C sono prossimamente eguali nel caso della terra, questo periodo è prossimamente eguale ad un giorno. Nessuna di tali ineguaglianze è stata trovata. Se però esistesse una tale ineguaglianza potremmo considerare questi due termini insieme come una separata ineguaglianza da aggiungersi poi a quella prodotta dagli altri termini di ω_1, ω_2 il di cui periodo è la metà di un anno.

L'effetto della funzione complementare sul movimento del polo della terra è stato già considerato. Il movimento è lo stesso come se la terra ad un istante qualunque fosse messa in rotazione intorno ad un asse i di cui coseni di direzione sono proporzionali ad $H \operatorname{sen}\left(\frac{Cn}{A}t + K\right)$, $-H\cos\left(\frac{Cn}{A}t + K\right)$ ed n e poi lasciata a sè stessa. L'asse istantaneo descriverà un cono retto di piccolo angolo intorno all'asse di figura ed anche un cono retto di piccolo angolo nello spazio. Quindi per questa causa non vi può essere alcun cambiamento permanente nella posizione nello spazio dell'asse della terra. Si vegga l'Art. 164.

198. Per trovare la posizione nello spazio del polo C della terra alla fine di un tempo qualunque t dobbiamo integrare le equazioni (VI). Poichè trascuriamo il quadrato della forza perturbatrice possiamo nel secondo membro considerare θ costante,

ed l misurata da un punto fisso nello spazio. Per la teoria del moto ellittico abbiamo

$$R^2 \frac{dl}{dt} = \text{costante}$$
$$= R_0^2 n' \sqrt{1-e'^2}.$$

Ora μ contiene il fattore $\left(\frac{R_0}{R}\right)^3$, poniamo allora

$$\frac{\mu}{2C} = Sn'^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3,$$

sicchè nel caso in cui il sole è il corpo perturbatore $S = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}$, e nel caso della luna $S = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{1}{1+\nu}$.

Le equazioni diventano ora

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dl} &= -S\frac{n'}{n}\frac{R_0}{R\sqrt{1-e'^2}} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2l \\ \frac{d\psi}{dl} &= -S\frac{n'}{n}\frac{R_0}{R\sqrt{1-e'^2}} \cos\theta\,(1-\cos 2l) \end{aligned}\right\}.$$

Dall'equazione dell'ellisse abbiamo

$$\frac{R_0(1-e'^2)}{R} = 1 + e'\cos(l-L).$$

Se questo valore di R si sostituisce nelle equazioni sarà chiaro che tutt' i termini che contengono e' sono periodici e non salgono nell'integrazione in modo da divenire egualmente importanti degli altri. Poichè quindi e' è piccola essendo eguale circa ad $\frac{1}{60}$, sarà inutile di calcolare questi termini. Abbiamo perciò

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \text{cost.} + S\frac{n'}{2n}\operatorname{sen}\theta\cos 2l \\ \psi &= \text{cost.} - S\frac{n'}{n}\cos\theta\left(l - \frac{\operatorname{sen} 2l}{2}\right) \end{aligned}\right\}.$$

199. Consideriamo prima il significato del termine $-S\frac{n'}{n}\cos\theta l$ nel valore di ψ. Un punto C_0 descriva un circolo minore intorno

al polo Z dell'orbita del pianeta perturbatore, la distanza CZ essendo costante ed eguale al valore medio di θ. Sia la velocità uniforme ed eguale ad $S\frac{n'^2}{n}\cos\theta$, e sia la direzione del movimento *opposta* a quella del corpo perturbatore. Allora C_0 rappresenta il movimento del polo della terra per quanto concerne questo termine. Questo moto uniforme si chiama Precessione.

In seguito consideriamo i due termini

$$\left.\begin{aligned}\delta\theta &= S\frac{n'}{2n}\operatorname{sen}\theta\cos 2l\\ \delta\psi &= S\frac{n'}{2n}\cos\theta\operatorname{sen}2l\end{aligned}\right\}.$$

Se poniamo $x = \operatorname{sen}\theta\, d\psi$, $y = \delta\theta$, abbiamo

$$\frac{x^2}{\left(S\frac{n'}{2n}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right)^2} + \frac{y^2}{\left(S\frac{n'}{2n}\operatorname{sen}\theta\right)^2} = 1,$$

che è l'equazione di un'ellisse.

Descriviamo quindi intorno a C_0 come centro un'ellisse i di cui semiassi sono $S\frac{n'}{2n}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$ ed $S\frac{n'}{2n}\operatorname{sen}\theta$ rispettivamente perpendicolare a e secondo ZC; ed un punto C_1 descriva questa ellisse in un periodo eguale alla metà del tempo periodico del corpo perturbatore. Inoltre la velocità di C_1 sia la stessa come se esso fosse un punto materiale attratto da un centro di forza nel centro che varia come la distanza. Allora C_1 rappresenta il movimento del polo della terra affetto dalla Precessione e dalle parti principali della Nutazione.

Se avessimo scelto da includere nei nostri valori approssimati di θ e ψ un piccolo termine qualunque di ordine superiore, avremmo potuto rappresentare il suo effetto col movimento di un punto C_2 che descrive un'altra piccola ellisse col centro in C_1. Ed in simil modo descrivendo successivamente delle ellissi possiamo rappresentare geometricamente tutt'i termini di θ e ψ.

200. Nel caso del sole abbiamo $S = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}$, sicchè la precessione in un anno è $\frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n'}{n}\cos\theta 2\pi$. Si mostra nei trattati

sulla Figura della Terra che vi è ragione da porre $\frac{C-A}{C}=0,0031$. Inoltre abbiamo $\frac{n'}{n}=\frac{1}{365}$, e $\theta=23°, 8'$. Questo dà una precessione di circa $15'',42$ per anno. Similmente i coefficienti della Nutazione Solare in ψ e θ si trovano rispettivamente essere $1'',23$ e $0'',53$. Se supponessimo l'orbita della luna fissa, potremmo trovare in modo simile il movimento del polo prodotto dalla luna riferito al polo dell' orbita della luna. In questo caso $S=\frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{1}{1+\nu}$. Il valore di θ varia tra i limiti $23°\pm5°$. Ponendo $\frac{n'}{n}=\frac{1}{27}$, $\nu=80$, $\theta=23°$, troviamo una precessione in un anno poco più del doppio di quella prodotta dal sole. Ma i coefficienti di ciò che sarebbero le nutazioni sono circa un sesto di quelli prodotti dal sole.

201. Nella investigazione precedente abbiamo considerata l'orbita del corpo perturbatore fissa nello spazio. Se non è così, dobbiamo prendere il piano CA perpendicolare alla sua posizione istantanea nell'istante che si considera. In questo caso le equazioni geometriche (II) richiederanno qualche alterazione. Trascurando come prima il termine $\frac{d\psi}{dt}\cos\theta$, avremo ora $\frac{d\chi}{dt}=-n+\frac{dv}{dt}$ dove v è un piccolo termine che dipende dal movimento del piano dell'orbita. Questo termine sarà molto piccolo paragonato con n, e quindi possiamo porre tuttora $\frac{d\chi}{dt}=-n$ nei piccoli termini. Le equazioni dinamiche non saranno perciò materialmente alterate. Riguardo alle altre due equazioni geometriche, è chiaro che ω_2, ω_1 continueranno ad esprimere le parti risolute della velocità di C nello spazio secondo e perpendicolarmente alla posizione istantanea di ZC. Tutto il cambiamento che sarà necessario è quindi di riferire queste velocità date dalle equazioni (VI) ad assi fissi nello spazio, e poi con l'integrazione troveremo il movimento di C. Questo è l'andamento che seguiremo nel caso della luna.

202. *Dare una spiegazione generale del modo in cui l' attrazione del Sole produce la Precessione e la Nutazione.*

Se un corpo è messo in rotazione intorno ad un punto fisso O non sollecitato da alcuna forza, sappiamo che le quantità di moto di tutti gli elementi sono insieme equivalenti ad una coppia che

rappresenteremo con G intorno ad un asse chiamato la linea invariabile. Sia T la forza viva del corpo. Se si tira un piano perpendicolare all'asse di G ad una distanza $\frac{\sqrt{T}}{G}\varepsilon^2$ dal punto fisso, allora l'intero movimento è rappresentato facendo che l'ellissoide dei momenti il di cui parametro è ε rotoli su questo piano. Nel caso della terra, l'asse OI d'istantanea rotazione coincide così prossimamente con l'asse di figura OC che il piano fisso sul quale rotola l'ellissoide è molto prossimamente un piano tangente nell'estremità dell'asse di figura. Questo è così prossimamente il caso che trascureremo i *quadrati* di tutt'i piccoli termini che dipendono dalla parte risoluta della velocità angolare intorno ad un asse qualunque della terra perpendicolare all'asse di figura.

Consideriamo ora come questo movimento è perturbato dall'azione del sole. Il sole attrae le parti della terra più vicine con una forza leggermente maggiore di quella con la quale attrae le più lontane. Quindi quando il sole è al nord o al sud dell'equatore la sua attrazione produrrà una coppia che tende a girare la terra intorno a quell'asse nel piano dell'equatore che è perpendicolare alla linea che congiunge il centro della terra col sole. Sia la grandezza di questa coppia rappresentata da α, e supponiamo che essa agisca impulsivamente ad intervalli di tempo dt.

Ad un istante qualunque questa coppia genererà una nuova quantità di moto αdt intorno all'asse della coppia α. Questa si deve comporre con la quantità di moto esistente G, per formare una coppia risultante G'. Se l'asse di α fosse esattamente perpendicolare a quello di G avremmo $G'=\sqrt{G^2+(\alpha dt)^2}=G$ ultimamente.

Sia θ l'angolo che l'asse di G fa con OC, allora θ è una quantità di quell'ordine di piccole quantità il di cui quadrato si deve trascurare. Prendendo il caso quando OG, OC e l'asse di α sono in un piano, poichè questo è il caso in cui G' differirà maggiormente da G, abbiamo

$$\begin{aligned} G'^2 &= (G\cos\theta)^2 + (G\,\mathrm{sen}\,\theta + \alpha dt)^2 \\ &= G^2 + 2G\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta\, dt \quad \text{......................} \quad (1). \end{aligned}$$

Allora α e θ essendo dello stesso ordine di piccole quantità, il termine $\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta$ si deve trascurare. Quindi abbiamo $G'=G$. Ma l'asse di G è alterato nello spazio per un angolo $\frac{\alpha dt}{G}$ in un piano che passa per OG e per l'asse di α.

Consideriamo in seguito come la forza viva T è alterata. Se T' è la nuova forza viva abbiamo

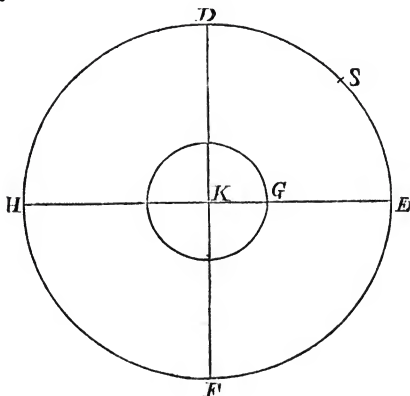
$$T' - T = 2 \text{ volte il lavoro fatto dalla coppia } \alpha$$
$$= 2\alpha\,(\omega \cos\beta)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dove $\omega \cos\beta$ è la parte risoluta della velocità angolare intorno all'asse di α. Per la stessa ragione di sopra il prodotto di questa velocità angolare e di α si deve trascurare. Quindi abbiamo $T' = T$. Segue da questi risultati che la distanza $\frac{\sqrt{T}}{G}$ del piano fisso dal punto fisso non è alterata dall'azione di α.

Così il piano fisso sul quale rotola l'ellissoide si mantiene alla stessa distanza dal punto fisso, sicchè le tre linee OC, OI, OG essendo inizialmente molto vicine tra loro rimarranno sempre molto ravvicinate tra loro. Ma la normale OG a questo piano ha un movimento nello spazio, quindi le altre debbono accompagnarla. Questo movimento è ciò che chiamiamo Precessione e Nutazione.

Finalmente questi piccoli termini che sono stati trascurati non si accumuleranno continuamente in modo da produrre alcun effetto sensibile. Siccome la terra si rivolge in un giorno, l'asse OC descriverà un cono di piccolo angolo θ intorno ad OG. L'asse intorno al quale il sole genera la velocità angolare α è sempre ad angoli retti col piano che contiene il sole ed OC. Quindi, riguardando il sole come fisso per un giorno, l'angolo θ nell'equazione (1) cambia il suo segno in ogni metà di giorno. Così G' è alternativamente maggiore e minore di G. Similmente poichè l'asse istantaneo descrive un cono intorno ad OG si può mostrare che T' è alternativamente maggiore e minore di T.

203. Tracciamo il movimento dell'asse OG per un intero anno. Si descriva una sfera col centro in O e riferiamo il movimento alla superficie di questa sfera. Sia K il polo dell'eclittica ed il sole S descriva il circolo $DEFH$ di cui K è il polo. Sia DF un circolo massimo perpendicolare a KG, allora siccome OG e l'asse di figura della terra sono così vicini tra loro che possiamo considerarli come coincidenti, D ed F saranno le intersezioni dell'equatore e dell'eclittica. Quando il sole è al nord o al sud dell'equatore, la sua attrazione genera la coppia α, la quale sarà positiva o negativa secondo che il sole è da una parte o dall'altra. Questa coppia svanisce quando il sole passa per l'equatore in D o F. Se il sole è dovunque in DEF, cioè a nord dell'equa-

tore, G si muove in una direzione perpendicolare all'arco GS verso D. Se il sole è dovunque in FHD, α ha il segno opposto e

quindi G si muove di nuovo perpendicolarmente alla posizione istantanea di GS ma tuttora verso D. Considerando l'effetto totale prodotto in un anno mentre il sole descrive il circolo $DEFH$, vediamo che G si muoverà per uno spazio molto piccolo verso D, cioè nella direzione opposta al movimento del sole. Risolvendo questo secondo la tangente al circolo di centro K e raggio KG, vediamo che il movimento di G è costituito di (1) un movimento uniforme di G lungo questo circolo indietro, che si chiama Precessione, e (2) di un'ineguaglianza in questo movimento uniforme che è una parte della Nutazione Solare. Ancora movendosi il sole da D ad E, G si muove all'indentro sicchè la distanza KG diminuisce, ma movendosi il sole da E ad F, KG aumenta. Sicchè nel complesso la distanza KG è inalterata con un'ineguaglianza che è l'altra parte della Nutazione Solare.

È evidente che ciascuna di queste ineguaglianze percorre il suo periodo nella metà di un anno.

204. *Spiegare la causa dalla Nutazione Lunare.*

L'attrazione del sole sulle parti protuberanti dell'equatore terrestre fa descrivere al polo C della terra un circolo minore con velocità uniforme intorno al polo K dell'eclittica con due ineguaglianze, l'una in latitudine e l'altra in longitudine, il di

cui periodo è la metà di un anno. Queste due ineguaglianze si chiamano le Nutazioni Solari. Nello stesso modo l'attrazione della luna fa descrivere al polo della terra un circolo minore intorno al polo M dell'orbita lunare con due ineguaglianze. Queste ineguaglianze sono molto piccole e di breve periodo, cioè quindici giorni, e sono perciò generalmente trascurate. Tutto ciò di cui si tien conto è il movimento uniforme di C intorno ad M. Ora K è l'origine di riferimento, quindi se M fosse fisso il movimento di C intorno ad M sarebbe rappresentato da un lento movimento uniforme di C intorno a K insieme con due ineguaglianze di cui la grandezza sarebbe eguale all'arco MK o 5 gradi e di cui il periodo sarebbe molto lungo, cioè eguale a quello di C intorno a K prodotto dal movimento uniforme. Ma sappiamo per la Teoria Lunare che M descrive un circolo intorno a K come centro con una velocità molto più rapida di quella di C. Quindi il movimento di C sarà rappresentato da un lento movimento uniforme intorno a K insieme con due ineguaglianze le quali saranno tanto più piccole quanto più grande è la velocità di M intorno a K e il di cui periodo sarà prossimamente eguale a quello di M intorno a K. Questo periodo sappiamo che è di circa 19 anni. Queste due ineguaglianze si chiamano la Nutazione Lunare. Si vedrà che la loro origine è diversa da quella della Nutazione Solare.

205. *Calcolare la Precessione e la Nutazione Lunare.*

Sia K il polo dell'eclittica, M quello dell'orbita lunare, C il polo della terra. Sia KX un arco fisso qualunque, $KC = \theta$, $XKC = \psi$, allora dobbiamo trovare θ e ψ in termini di t. Da quello che precede la velocità di C nello spazio è ad un istante qualunque in una direzione perpendicolare ad MC, ed eguale a

$$-\frac{3n''^2}{2n}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{1}{1+\nu}\cos MC \operatorname{sen} MC.$$

Per brevità rappresentiamo con P il coefficiente di $\cos MC$ $\operatorname{sen} MC$. Allora risolvendo queste velocità secondo e perpendicolarmente a KC, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -P \operatorname{sen} MC \cos MC \operatorname{sen} KCM \\ \operatorname{sen}\theta\,\frac{d\psi}{dt} &= -P \operatorname{sen} MC \cos MC \cos KCM \end{aligned}\right\}.$$

Per la teoria lunare sappiamo che M retrocede intorno a K

uniformemente, la distanza KM rimanendo inalterata. Sia quindi $KM = i$, e l'angolo $XKM = -mt + \alpha$.

Ora per la trigonometria sferica,

$$\cos MC = \cos i \cos \theta + \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \theta \cos MKC,$$

$$\operatorname{sen} MC \cos KCM = \frac{\cos i - \cos MC \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$= \cos i \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} i \cos \theta \cos MKC,$$

$$\operatorname{sen} MC \operatorname{sen} KCM = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} MKC.$$

Sostituendo questi, abbiamo

$$\frac{d\theta}{dt} = -P\left\{\operatorname{sen} i \cos i \cos \theta \operatorname{sen} MKC + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\, MKC\right\}$$

$$\operatorname{sen} \theta \frac{d\psi}{dt} = -P\left\{ \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\cos^2 i - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i\right)\right.$$

$$\left. - \operatorname{sen} i \cos i \cos 2\theta \cos MKC - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos 2MKC\right\}.$$

Per una prima approssimazione possiamo trascurare le variazioni di θ e ψ quando sono moltiplicate per la piccola quantità P. Quindi $\frac{d\theta}{dt}$ contiene solamente termini periodici, e l'inclinazione θ non ha un'alterazione permanente. Ma $\frac{d\psi}{dt}$ contiene un termine indipendente da MKC; considerando solamente questo termine, abbiamo

$$\psi = \text{costante} - P \cos \theta \left(\cos^2 i - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i\right) t.$$

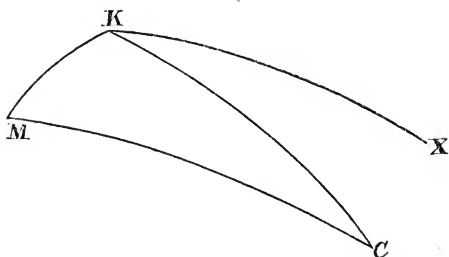
Questa equazione esprime il movimento di precessione del polo dovuto all'attrazione della luna. Possiamo scrivere questa equazione nella forma

$$\psi = \psi_0 - pt.$$

Per trovare le nutazioni, dobbiamo sostituire per MKC il suo valore approssimato

$$MKC = (-m + p)\, t + \alpha - \psi_0.$$

Abbiamo allora dopo l'integrazione

$$\theta = \text{cost.} - \frac{P \operatorname{sen} i \cos i \cos\theta}{m-p} \cos MKC - \frac{P \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}\theta}{4(m-p)} \cos 2\, MKC.$$

Il secondo di questi due termini periodici essendo circa una cinquantesima parte del primo, che è esso stesso molto piccolo, ordinariamente si trascura. Inoltre p è molto piccolo in paragone di m, quindi abbiamo

$$\theta = \theta_0 - \frac{P \operatorname{sen} i \cos i \cos\theta}{m} \cos MKC.$$

Questo termine esprime la Nutazione Lunare nell'obbliquità.

Nello stesso modo integrando l'espressione di ψ, e trascurando i termini molto piccoli, abbiamo

$$\psi = \psi_0 - P\cos\theta \left(\cos^2 i - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 i\right)t - P\frac{\operatorname{sen} 2i}{2m} \cdot \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen} MKC.$$

L'angolo MKC è la longitudine del nodo ascendente della luna, e la linea dei nodi si sa che compie una rivoluzione in circa 18 anni e 7 mesi. Se rappresentiamo questo periodo con T abbiamo $MKC = -\frac{2\pi}{T}t + \text{costante}.$

Movimento della Luna intorno al suo centro di gravità.

206. *Il centro di gravità di un corpo rigido descrive un'orbita che è prossimamente circolare intorno ad un centro molto lontano di forza, che varia inversamente come il quadrato della distanza, e situato in uno dei piani principali pel centro di gravità. Si cerca di determinare il moto.*

Siano GA, GB, GC gli assi principali in G, il centro di gravità del corpo, e GC l'asse perpendicolare al piano in cui si muove G. Siano A, B, C i momenti d'inerzia rispetto a GA, GB, GC rispettivamente, e sia M la massa del corpo.

Sia O il centro di forza, ed Ox la linea iniziale. Sia $OG=r$, $GOx=\theta$. Supponiamo che il corpo giri intorno al suo asse OC nella stessa direzione nella quale il centro di gravità descrive la sua orbita intorno ad O, e sia l'angolo $OGA=\varphi$.

Ora se V è il potenziale dovuto al centro di forza,

$$V=\frac{M}{r}+\frac{A+B+C-3I}{2r^3},$$

ed

$$I=A\cos^2\varphi+B\,\mathrm{sen}^2\varphi.$$

Quindi le forze che agiscono sul centro di gravità del corpo sono

$$\mu\frac{dV}{dr}=-\frac{\mu M}{r^2}\left\{1+\frac{3}{2}\frac{A+B+C-3I}{Mr^2}\right\}$$

secondo OG, e

$$-\mu\frac{dV}{rd\varphi}=\frac{\mu M}{r^2}\cdot\frac{3}{2}\frac{B-A}{Mr^2}\,\mathrm{sen}\,2\varphi$$

perpendicolare ad OG, dove μ è una costante che dipende dall'intensità del centro di forza.

Il momento delle forze che tendono a girare il corpo intorno a G è

$$\mu\frac{dV}{d\varphi}=-\frac{\mu M}{r}\frac{3}{2}\frac{B-A}{Mr^2}\,\mathrm{sen}2\varphi.$$

Le equazioni del moto sono perciò

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{\mu}{r^2}\left\{1+\frac{3}{2}\frac{A+B+C-3I}{Mr^2}\right\}\\&\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{\mu}{r^2}\frac{3}{2}\frac{B-A}{Mr^2}\,\mathrm{sen}2\,\varphi\\&\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{\mu}{r^3}\frac{3}{2}\frac{B-A}{C}\,\mathrm{sen}\,2\varphi\end{aligned}\right\}.$$

È dato che il centro di gravità del corpo descrive un'orbita

che è prossimamente circolare. Quindi possiamo porre

$$\left.\begin{aligned} r &= c(1+\rho) \\ \frac{d\theta}{dt} &= n\left(1+\frac{d\psi}{dt}\right) \end{aligned}\right\},$$

dove ρ e $\frac{d\psi}{dt}$ sono piccole quantità i di cui quadrati si possono trascurare. Possiamo anche porre $r=c$ nei *piccoli* termini nei secondi membri di queste equazioni. Sostituendo e riducendo, le equazioni diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - 3n^2\rho - 2n^2\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{9}{4}n^2\gamma' - \frac{9}{4}n^2\gamma\cos 2\varphi \\ 2\frac{d\rho}{dt} + \frac{d^2\psi}{dt^2} &= \frac{3}{2}n\gamma \operatorname{sen} 2\varphi \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + n\frac{d^2\psi}{dt^2} &= -\frac{3}{2}\frac{B-A}{C}n^2 \operatorname{sen} 2\varphi \end{aligned}\right\},$$

dove $$\gamma = \frac{B-A}{Mc^2}, \quad \gamma' = \frac{2C-A-B}{3Mc^2}.$$

Per ipotesi, la grandezza lineare del corpo è piccola in paragone della sua distanza dal centro di forza. Quindi γ, γ' sono entrambe piccole quantità almeno dell'ordine del quadrato del semi-diametro angolare del corpo, veduto dal centro di forza. Se A, B, C, sono prossimamente eguali, come nel caso della terra o della luna, γ, γ' saranno tutte e due estremamente piccole. Possiamo perciò, da principio, trascurare i termini che contengono γ e γ', e considerare il loro effetto dopo. In questo caso, le due prime equazioni che determinano r e θ in termini di t, non contengono la forza perturbatrice. Quindi il movimento del centro di gravità è lo stesso come se l'intera massa fosse riunita in quel punto.

207. Se altre forze oltre di quelle dovute alla forza centrale agiscono sul corpo, le equazioni del moto dovranno modificarsi. Questo è il caso quando il corpo che si considera è la luna. Nel secondo membro della prima e della seconda equazione, abbiamo forze dovute alle attrazioni perturbatrici del sole e di altri corpi. Queste producono, come si mostra nella Teoria Lunare, termini nelle espressioni di r e $\frac{d\theta}{dt}$ della forma

$$r = c\{1 + L\cos(pt+\alpha) + \ldots\},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = n + \beta t + Mn\cos(pt+\alpha) + \ldots$$

dove β è un coefficiente molto piccolo che produce un cambiamento secolare nella velocità angolare della luna.

208. Se sostituiamo il valore di $\frac{d\theta}{dt}$ nella terza equazione, abbiamo l'equazione seguente per determinare φ,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -n^2\frac{3}{2}\frac{B-A}{C}\operatorname{sen}2\varphi - \beta + npM\operatorname{sen}(pt+\alpha) \,..\, \text{(I)}.$$

Ora se φ non è piccolo, i termini principali nel secondo membro di questa equazione saranno i primi due. Quindi possiamo approssimarci al valore di φ prendendo

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -n^2\frac{3}{2}\frac{B-A}{C}\operatorname{sen}2\varphi - \beta.$$

Supponiamo che B sia maggiore di A, sicchè φ è l'angolo che l'asse del *minimo* momento fa con OG, e per brevità poniamo $n^2\frac{3}{2}\frac{B-A}{C} = \frac{q^2}{2}$. Allora integrando, abbiamo

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = H + \frac{q^2}{2}\cos 2\varphi - 2\beta\varphi,$$

dove H è una costante arbitraria. Per eliminare H, si sappia che in un dato istante (iniziale o no) $\varphi=\varepsilon$, $\frac{d\varphi}{dt}=m$.

Allora

$$m^2 = H + \frac{q^2}{2}\cos 2\varepsilon - 2\beta\varepsilon;$$

onde
$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = m^2 + q^2\operatorname{sen}^2\varepsilon + 2\beta\varepsilon - q^2\operatorname{sen}^2\varphi - 2\beta\varphi$$
$$= L - q^2\operatorname{sen}^2\varphi - 2\beta\varphi,$$

dove L si è scritto per i termini indipendenti da φ. È chiaro che il secondo membro di questa equazione deve essere positivo durante il moto. Se le condizioni iniziali sono tali che L è positivo e piccolo in paragone di q, è chiaro che φ non può essere mai gran-

de. In fatti, β essendo molto piccolo in paragone di q, senφ deve essere sempre minore di $\frac{\sqrt{L}}{q}$. In questo caso l'asse principale GA farà piccole oscillazioni e la sua posizione media tenderà sempre molto prossimamente al centro di forza. Per trovare queste piccole oscillazioni dobbiamo ricorrere all'equazione (I). Essendo φ piccolo, abbiamo

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + q^2\varphi = -\beta + npM \operatorname{sen}(pt + \alpha) \ldots$$

onde $\varphi = H \operatorname{sen}(qt + K) - \frac{\beta}{q^2} + M \frac{np}{q^2 - p^2} \operatorname{sen}(pt + \alpha) + \ldots$

Se le condizioni iniziali sono tali che $\frac{\sqrt{L}}{q}$ non è minore dell'unità, non vi sono limiti al valore di φ. Se q è piccolo, abbiamo per una prima approssimazione $\varphi = mt + \varepsilon$. Per una seconda, abbiamo

$$\varphi = mt + \varepsilon + \frac{q^2}{8m} \operatorname{sen} 2(mt + \varepsilon) - \frac{1}{2}\beta t^2 - M\frac{m}{p} \operatorname{sen}(pt + \alpha) + \ldots$$

209. Possiamo applicare questi due risultati a spiegare perchè la luna rivolge sempre la stessa faccia alla terra, mentre la terra non rivolge sempre la stessa faccia al sole. Se supponiamo che la luna ad un istante qualunque si muova col suo asse di momento minimo rivolto verso la terra e che la sua velocità angolare intorno al suo asse di rotazione sia prossimamente eguale a quella della luna intorno alla terra, allora l'analisi precedente mostra che l'asse di momento minimo continuerà sempre a rivolgersi molto prossimamente alla terra. La velocità media angolare della luna intorno al suo asse diventerà immediatamente eguale a quella della luna intorno alla terra e parteciperà di tutti i suoi cambiamenti secolari.

210. Paragonando il valore di φ ottenuto dalla teoria con i risultati dell'osservazione possiamo sperare di ottenere alcune indicazioni del valore di q^2 e quindi di $\frac{B - A}{C}$. Se il termine $H \operatorname{sen}(qt + K)$ si potesse conoscere con l'osservazione, dedurremmo il valore di $\frac{B-A}{C}$ dal suo periodo.

Tra gli altri termini dell'espressione di φ quelli saranno il meglio adatti a scoprire il valore di q che hanno i più grandi coefficienti, cioè quelli in cui o il numeratore M è il più grande

o il denominatore q^2-p^2 il più piccolo possibile. Esaminando il valore numerico dei loro coefficienti Laplace ha mostrato che se $\frac{B-A}{C}$ fosse grande come 0,03 l'ineguaglianza ellittica si potrebbe riconoscere con l'osservazione, e che se esso fosse tra 0,0014 e 0,003 l'equazione annuale si potrebbe osservare.

211. Il movimento di un corpo rigido intorno ad un centro lontano di forza è stato investigato nella supposizione che il movimento abbia luogo interamente in un piano. Esaminando le equazioni scritte nell'Art. 206, vediamo che esse sarebbero soddisfatte esattamente se r fosse costante e $\varphi=0$. Il caso perciò in cui il centro di gravità descrive un'orbita circolare, ed il corpo rigido volge sempre l'asse di momento minimo verso il centro di forza è uno di *movimento fermo*. L'investigazione precedente mostra ancora che questo movimento è *stabile* per tutte le perturbazioni che non alterano il piano del movimento. Rimane ora a determinare l'effetto di queste perturbazioni nel caso più generale quando il movimento ha luogo in tre dimensioni.

L'intera attrazione del centro di forze sul corpo è equivalente ad una sola forza agente nel centro di gravità, e ad una coppia. Se la grandezza del corpo è piccola paragonata con la sua distanza dal centro di forza, possiamo trascurare l'effetto del movimento del corpo intorno al suo centro di gravità nel modificare la forza risultante. Il movimento del centro di gravità sarà allora lo stesso come se il tutto fosse riunito in un solo elemento. Il problema si riduce perciò al seguente. Un corpo rigido gira intorno al suo centro di gravità G, ed è sollecitato da un centro di forza E che si muove in dato modo. Nel caso in cui il corpo rigido è la luna questo centro di forza, cioè la terra, si muove in un'orbita prossimamente circolare in un piano che esso stesso anche ha un lento movimento nello spazio. Questo movimento è tale che una normale GM all'orbita istantanea descrive un cono di piccolo angolo intorno alla normale GK all'eclittica. Le due normali mantengono un'inclinazione prossimamente costante di circa 5°, 8'; ed il movimento della normale all'orbita istantanea è prossimamente uniforme.

212. Sarà chiaramente conveniente di riferire il movimento agli assi GX, GY, GZ fissi nello spazio tali che GZ sia normale all'eclittica. Siano GA, GB, GC gli assi principali della luna al centro di gravità G. Siano (p, q, r) i coseni di direzione di GZ riferito agli assi coordinati GA, GB, GC. Allora abbiamo, poichè GZ è fisso nello spazio,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} - \omega_3 q + \omega_2 r = 0 \\ &\frac{dq}{dt} - \omega_1 r + \omega_3 p = 0 \\ &\frac{dr}{dt} - \omega_2 p + \omega_1 q = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I).$$

Ora il nostro oggetto si è di trovare le piccole oscillazioni intorno allo stato di movimento fermo in cui GZ, GC, GM coincidono tutti. Avremo perciò p, q, ω_1, ω_2 piccoli tutti, ed r molto prossimamente eguale all'unità. Le equazioni (I) diverranno perciò

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} - nq + \omega_2 = 0 \\ &\frac{dq}{dt} - \omega_1 + np = 0 \end{aligned}\right\},$$

dove n è il valore medio di ω_3.

Siano λ, μ, ν i coseni di direzione del centro di forza E veduto da G. Allora abbiamo per le equazioni di Eulero e l'Art. 195,

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{d\omega_1}{dt} - (B - C)\,\omega_2\,\omega_3 = -\,3n'^2(B - C)\,\mu\nu \\ &B\frac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\,\omega_3\,\omega_1 = -\,3n'^2(C - A)\,\nu\lambda \\ &C\frac{d\omega_3}{dt} - (A - B)\,\omega_1\,\omega_2 = -\,3n'^2(A - B)\,\lambda\mu \end{aligned}\right\} \ldots (II).$$

Nel caso del movimento fermo, il corpo rigido rivolge sempre l'asse (GA) del momento minimo verso il centro di forza, ed $\omega_3 = n'$. Abbiamo allora μ e ν entrambe piccole quantità, sicchè nella prima equazione possiamo trascurare il loro prodotto $\mu\nu$, e nella seconda equazione possiamo porre $\nu\lambda = \nu$. Inoltre, possiamo porre $\omega_3 = n = n'$ nei piccoli termini.

Se l è la latitudine della terra veduta dalla luna, abbiamo

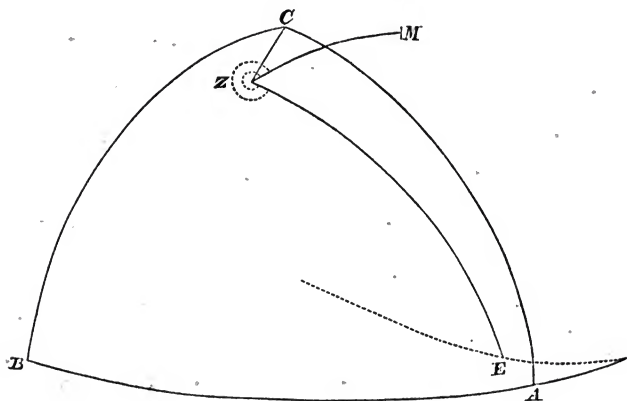
$$\operatorname{sen} l = \cos ZE = p\lambda + q\mu + r\nu = p + \nu \text{ prossimamente.}$$

Quindi le due prime equazioni di Eulero prendono la forma

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{d\omega_1}{dt} - (B - C)\,n\omega_2 = 0 \\ &B\frac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\,n\omega_1 = -\,3n^2(C - A)(-p + \operatorname{sen} l) \end{aligned}\right\} \ldots (III).$$

Se la terra, veduta dalla luna, si suppone che si muova in un'orbita circolare in un piano che serba una costante inclinazione $\tan^{-1} k$ all'eclittica, e di cui la longitudine del nodo è $-gt+\beta$, avremo

$$\operatorname{sen} l = k \operatorname{sen}(n't + gt - \beta).$$

In questa espressione g misura la ragione secondo la quale il nodo retrocede, ed è circa la duecento cinquantesima parte di n. Riguarderemo perciò $\frac{g}{n}$ come una piccola quantità.

Per risolvere queste equazioni, si troverà conveniente di sostituire per ω_1, ω_2 i loro valori in termini di p, q. Abbiamo allora

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{d^2q}{dt^2}+(A+B-C)n\frac{dp}{dt}-n^2(B-C)q=0. \\ &B\frac{d^2p}{dt^2}-(A+B-C)n\frac{dq}{dt}+4n^2(C-A)p=3n^2(C-A)\operatorname{sen} l \end{aligned}\right\},$$

Per trovare p, q poniamo

$$\left.\begin{aligned} p &= P \operatorname{sen}\{(n'+g)t-\beta\} \\ q &= Q \cos\{(n'+g)t-\beta\} \end{aligned}\right\},$$

dove P, Q sono costanti da determinarsi con la sostituzione nel-

l'equazione. Abbiamo

$$\left.\begin{array}{l} Q\{A(n+g)^2+(B-C)n^2\}=P(A+B-C)n(n+g) \\ P\{B(n+g)^2-4(C-A)n^2\}-Q(A+B-C)n(n+g)=-3n^2k(C-A) \end{array}\right\}.$$

Possiamo risolvere queste equazioni per trovare P e Q accuratamente. Nel caso della luna i rapporti $\frac{A-B}{C}$, $\frac{B-C}{A}$, $\frac{C-A}{B}$ e $\frac{g}{n}$ sono tutti piccoli. Se quindi trascuriamo i prodotti di queste piccole quantità, la prima equazione ci dà $\frac{Q}{P}=1-\frac{g}{n}$. La seconda equazione darà allora

$$P=\frac{3nk(C-A)}{3n(C-A)-2Bg}.$$

Essendo g molto piccolo in paragone di n, possiamo riguardare P e Q come eguali.

213. Le funzioni complementari si possono trovare nel modo solito ponendo

$$p=F\,\mathrm{sen}(st+H),$$

$$q=G\cos(st+H),$$

sostituendo abbiamo la quadratica

$$ABs^4-\{(A+B-C)^2-B(B-C)-4A(A-C)\}n^2s^2$$
$$+4(A-C)(B-C)n^4=0,$$

per trovare s^2, e

$$\frac{G}{F}=\frac{(A+B-C)ns}{As^2+(B-C)n^2},$$

per trovare il rapporto dei coefficienti dei termini corrispondenti in p e q. Se le radici di questa equazione fossero negative p e q sarebbero rappresentate da valori esponenziali di t, e così col tempo cesserebbero di essere piccole. È necessario perciò per la stabilità che il coefficiente di s^2 sia negativo ed il prodotto di $(A-C)$ per $(B-C)$ positivo. Tutte e due queste condizioni sono probabilmente soddisfatte nel caso della luna. Infatti poichè $B-C$ ed $A-C$ sono tutte e due piccole, il termine $(A+B-C)^2$ è molto maggiore degli altri due termini nel coefficiente di s^2. Inoltre, poichè la luna è schiacciata ai suoi poli, avremo probabilmente A e B entrambi minori di C.

214. Sia M il polo dell' orbita della luna, che è lo stesso di quello dell' orbita della terra veduta dal centro della luna. Allora M è il polo della linea punteggiata nella figura dell'Art. 212. Quindi l' angolo EZM misurato girando ZE nella direzione positiva intorno a Z finchè venga a coincidere con ZM, è $=\frac{3\pi}{2}-\{(n+g)t-\beta\}$. Ancora, se l'angolo EZC si misura nella stessa direzione, abbiamo

$$\cos EZC=\frac{\cos EC-\cos CZ\cos ZE}{\operatorname{sen} CZ \operatorname{sen} ZE}$$

$$=\frac{\nu-r(p\lambda+q\mu+r\nu)}{\sqrt{p^2+q^2}\operatorname{sen} ZE}$$

$$=-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\text{, prossimamente.}$$

Quindi troviamo facilmente

$$\operatorname{sen} EZC=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Ma $\operatorname{sen} CZM=\operatorname{sen} EZM\cos EZC-\cos EZM\operatorname{sen} EZC$

$$=\frac{\cos\{(n+g)t+\beta\}p-\operatorname{sen}\{(n+g)t+\beta\}q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

Se ora sostituiamo per p e q i loro valori, è chiaro che i termini in p e q, il di cui argomento è $n+g$, scompariscono. Sicchè se F e G fossero zero, il seno dell' angolo CZM sarebbe assolutamente zero. In questo caso i tre poli C, Z, M debbono giacere in un arco di circolo massimo, o ciò che è la stessa cosa, *l'equatore della luna, l' orbita della luna, e l' eclittica debbono intersecarsi tra loro nella stessa linea dei nodi.*

Se però F e G non sono zero, ma solamente molto piccoli, abbiamo

$$\operatorname{sen} CZM=\frac{\Sigma F''\operatorname{sen}(s't+H')}{\sqrt{P^2+\Sigma G'^2\operatorname{sen}(s't+H')}},$$

dove F'', G' contengono F o G come fattore, e sono perciò piccoli. Se quindi F e G sono entrambi piccoli in paragone di P, l' angolo CZM rimarrà o sempre piccolo o sempre prossimamente eguale a π.

L'intersezione dell'equatore della luna con l'eclittica oscillerà quindi intorno all'intersezione dell'orbita della luna con l'eclittica come sua posizione media. Poichè queste oscillazioni sono insensibili, ne segue che nel caso della natura, le funzioni complementari debbono essere estremamente piccole paragonate con i termini che dipendono direttamente dalla forza perturbatrice.

215. Se disprezziamo le funzioni complementari abbiamo $p=P\,\text{sen}\varphi$, $q=P\cos\varphi$, dove $\varphi=(n'+g)t-\beta$. Ora $\text{sen}^2 CZ=p^2+q^2$; quindi $CZ=-P$ molto prossimamente. Il valore di CZ, l'inclinazione dell'equatore lunare all'eclittica, si sa che è circa 1°,28′, Quindi, essendo $\frac{g}{n}=0{,}004$, possiamo dedurre dall'espressione di P alla fine dell'Art. 212 un'approssimazione al valore di $\frac{C-A}{B}$. In questo modo Laplace trova $\frac{C-A}{B}=0{,}000599$.

ESEMPII.

1. L'attrazione di un corpo qualunque di massa M sopra un elemento lontano si può trovare nel modo seguente. Si costruisca uno strato infinitamente sottile di massa $3M$ limitato da ellissoidi simili e che abbia l'ellissoide di girazione al centro di gravità per una delle superficie limitanti. Inoltre un elemento di massa $4M$ sia riunito nel centro di gravità. Allora l'attrazione di M sopra un elemento lontano qualunque è la stessa in direzione e grandezza come se $4M$ lo attraesse e $3M$ lo respingesse.

2. Supponendo (1) che l'ellitticità della superficie della terra sia così piccola che l'espressione di V nell'Art. 192 si possa prendere come vera per punti esterni vicini alla superficie della terra, e (2) che in tutt'i punti sulla superficie la risultante dell'attrazione e della forza centrifuga sia normale alla terra, dimostrare che il potenziale in un punto qualunque alla distanza r dal centro è

$$V=\frac{M}{r}+\frac{Ma}{3r^3}\left(\varepsilon-\frac{m}{2}\right)\left(1-3\,\text{sen}^2\lambda\right),$$

dove a è il semiasse maggiore della terra, ε l'ellitticità di un meridiano qualunque, λ la latitudine del luogo, cioè l'angolo che la direzione di r fa con l'asse maggiore, ed m è il rapporto della forza centrifuga all'equatore alla gravità equatoriale.

3. Se la terra è formata di strati concentrici sferoidali di piccole ma differenti ellitticità e di differenti densità, mostrare che

$$\frac{C-A}{C}=\frac{\int \rho \frac{d\,(a^5\varepsilon)}{da}\,da}{\int \rho \frac{da^5}{da}\,da},$$

dove ε è l'ellitticità e ρ la densità di uno strato, l'asse maggiore del quale è a; il quadrato di ε essendo trascurato. Ne segue che se ε è costante, $\frac{C-A}{C}$ è indipendente dalla legge della densità.

4. Se la terra fosse uno strato omogeneo limitato da ellissoidi simili, l'interno essendo vuoto, la precessione sarebbe la stessa come se la terra fosse interamente solida.

5. Se la terra fosse uno strato omogeneo limitato esternamente da uno sferoide ed internamente da una sfera concentrica, l'interno essendo ripieno di un perfetto fluido della stessa densità della terra, mostrare che la precessione sarebbe maggiore che se la terra fosse interamente solida.

6. Mostrare che la luna rivolge sempre la stessa faccia molto prossimamente a quel fuoco della sua orbita in cui la terra non è situata.

7. Un elemento m si muove senza pressione lungo un filo metallico circolare levigato di massa M con velocità uniforme sotto l'azione di una forza centrale situata nel centro del filo che attrae secondo la legge di natura. Mostrare che questo sistema di movimento è stabile se $\frac{m}{M}>\frac{8+12\sqrt{6}}{25}$. La perturbazione si suppone data all'elemento o al filo, il centro di forza rimanendo fisso nello spazio.

8. Un anello uniforme di massa M e di sezione molto piccola è gravato di un elemento pesante di massa m in un punto della sua circonferenza ed il tutto è in moto uniforme intorno ad un centro di forza che attrae secondo la legge di natura. Mostrare che il movimento non può essere stabile a meno che $\frac{m}{M+m}$ non sia compreso tra 0,815865 e 0,8279.

9. Il centro di gravità di un corpo di massa M, simmetrico rispetto al piano delle xy, è G; ed O è un punto tale che l'attra-

zione risultante del corpo su di O è secondo la linea GO. Allora se il corpo è situato con O coincidente con un centro fisso di forza S, ed è messo in rotazione intorno ad un asse condotto per O perpendicolare al piano delle xy con una velocità angolare ω, G, se non è disturbato, girerà uniformemente in un circolo, rivolgendo sempre la stessa faccia verso O, purchè $Ma\omega^2$ sia eguale all'attrazione risultante secondo GO, dove a è la distanza GO. Si cerca di determinare le condizioni affinchè questo movimento sia stabile.

CAPITOLO XI.

Movimento di un corpo flessibile.

216. Il termine generale « Corpo flessibile » include molti altri corpi oltre dei fili. I movimenti di cui si tratta in questi casi sono generalmente piccole oscillazioni, e la loro discussione forma propriamente un soggetto a sè. Il lettore è perciò rimandato ad un trattato sul Suono ed alle memorie di Poisson, Cauchy ed altri sull'argomento. In questo capitolo si considererà solamente il movimento di un filo perfettamente flessibile.

217. Prop. *Determinare le equazioni generali del movimento di un filo sotto l'azione di forze qualunque.*

Primo. *Sia il filo inestensibile.*

Siano Ox, Oy, Oz, assi fissi qualunque nello spazio. Siano $Xmds$, $Ymds$, $Zmds$, le forze impresse che agiscono sopra un elemento qualunque ds del filo la di cui massa è mds. Siano u, v, w le parti risolute della velocità di questo elemento parallele agli assi. Allora, pel principio di D'Alembert, l'elemento ds del filo è in equilibrio sotto l'azione delle forze

$$mds\left(X-\frac{du}{dt}\right), \quad mds\left(Y-\frac{dv}{dt}\right), \quad mds\left(Z-\frac{dw}{dt}\right),$$

e delle tensioni nei suoi due estremi.

Sia T la tensione nel punto (x, y, z), allora $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$ sono le sue parti risolute parallele agli assi. Le parti risolute della tensione nell'altro estremo dell'elemento saranno

$$T\frac{dx}{ds}+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)ds,$$

e due simili quantità scrivendo y e z invece di x.

Quindi le equazioni del moto sono

$$\left.\begin{aligned} m\frac{du}{dt} &= \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+mX \\ m\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+mY \\ m\frac{dw}{dt} &= \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+mZ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

In queste equazioni le variabili s e t sono indipendenti. Per uno stesso elemento qualunque del filo, s è sempre costante, e la sua traiettoria è tracciata variando t. Da un'altra parte, la curva secondo la quale si conforma il filo ad un tempo proposto qualunque è data dalla variazione di s, t essendo costante. In questa investigazione s è misurato da un punto arbitrario qualunque, fisso nel filo, sino all'elemento che si considera.

Per trovare le equazioni geometriche. Abbiamo

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Differenziando questa rispetto a t, otteniamo

$$\frac{dx}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{dw}{ds} = 0 \text{ .... } (2).$$

Le equazioni (1) e (2) sono sufficienti a determinare x, y, z, e T, in termini di s e t.

218. Queste equazioni si possono porre sotto un'altra forma. Siano φ, ψ, χ, gli angoli fatti dalla tangente in x, y, z, con gli assi delle coordinate. Allora le equazioni (1) diventano

$$m\frac{du}{dt} = \frac{d}{ds}(T\cos\varphi) + mX \text{ .... } (3),$$

con simili equazioni per v e w.

Per trovare le equazioni geometriche, si differenzii $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$ rispetto a t; onde

$$-\operatorname{sen}\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{du}{ds} \text{ .... } (4).$$

Similmente, differenziando $\cos\psi = \frac{dy}{ds}$ e $\cos\chi = \frac{dz}{ds}$ otteniamo due altre simili equazioni per ψ e χ. Prendendo queste sei equazioni in unione con la seguente

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1 \text{ .... } (5),$$

abbiamo sette equazioni per determinare u, v, w, φ, ψ, χ e T.

Se il movimento ha luogo in un piano, queste si riducono alle quattro equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{du}{dt} &= \frac{d}{ds}(T\cos\varphi) + mX \\ m\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{ds}(T\operatorname{sen}\varphi) + mY \end{aligned}\right\} \text{ .... } (6),$$

$$\left.\begin{aligned} -\operatorname{sen}\varphi\frac{d\varphi}{dt}&=\frac{du}{ds}\\ \cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}&=\frac{dv}{ds}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7).$$

Le costanti e le funzioni arbitrarie che entrano nelle soluzioni di queste equazioni debbono essere determinate dalle circostanze particolari di ciascun problema.

219. In secondo luogo. *Sia il filo elastico.*

Sia σ la lunghezza non distesa dell'arco s, e sia $md\sigma$ la massa di un elemento $d\sigma$ della lunghezza non distesa o di ds della lunghezza distesa. Allora per lo stesso ragionamento di sopra, le equazioni del moto diventano

$$m\frac{du}{dt}=\frac{d}{d\sigma}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+mX\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (i),$$

e due simili equazioni per v e w. Per trovare le equazioni geometriche dobbiamo differenziare

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2=\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2,$$

le variabili indipendenti essendo ora σ e t. Differenziando rispetto a t abbiamo

$$\frac{dx}{d\sigma}\frac{du}{d\sigma}+\frac{dy}{d\sigma}\frac{dv}{d\sigma}+\frac{dz}{d\sigma}\frac{dw}{d\sigma}=\frac{ds}{d\sigma}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{d\sigma}\right).$$

Ma se λ è il modulo di elasticità del filo, abbiamo

$$\frac{ds}{d\sigma}=1+\frac{T}{\lambda}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (ii).$$

Sostituendo abbiamo

$$\frac{dx}{d\sigma}\frac{du}{d\sigma}+\frac{dy}{d\sigma}\frac{dv}{d\sigma}+\frac{dz}{d\sigma}\frac{dw}{d\sigma}=\left(1+\frac{T}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}\frac{dT}{dt}\ \ldots.\ (iii).$$

Queste due equazioni (ii) ed (iii) insieme con le tre equazioni (i) basteranno per la determinazione di u, v, w, s e T in termini di σ e t.

Se vogliamo adoperare le equazioni del movimento nelle forme corrispondenti a (3) e (6), le equazioni dinamiche diventano

$$m\frac{du}{dt}=\frac{d}{d\sigma}(T\cos\varphi)+mX,$$

con simili equazioni per v e w.

Le equazioni geometriche corrispondenti a (4) o (7) si possono trovare così. Abbiamo

$$\frac{dx}{d\sigma} = \cos\varphi \frac{ds}{d\sigma} = \cos\varphi \left(1 + \frac{T}{\lambda}\right).$$

Differenziando, abbiamo

$$\frac{du}{d\sigma} = -\operatorname{sen}\varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}(T\cos\varphi),$$

con simili espressioni per v e w.

220. Quando il movimento del filo ha luogo in un piano, è spesso conveniente di risolvere le velocità secondo la tangente e la normale della curva.

Siano u', v' le parti risolute della velocità dell'elemento ds secondo la tangente e la normale della curva in quell'elemento. Sia φ l'angolo che la tangente all'elemento ds fa con l'asse delle x. Allora per l'Art. 78 o 104, le equazioni del moto sono

$$\left.\begin{aligned} \frac{du'}{dt} - v'\frac{d\varphi}{dt} &= X' + \frac{dT}{mds} \\ \frac{dv'}{dt} + u'\frac{d\varphi}{dt} &= Y' + \frac{T}{m\rho} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Le equazioni geometriche si possono ottenere come segue. Abbiamo

$$u = u'\cos\varphi - v'\operatorname{sen}\varphi.$$

Differenziando rispetto ad s, abbiamo per l'Art. 218,

$$-\frac{d\varphi}{dt}\operatorname{sen}\varphi = \left(\frac{du'}{ds} - \frac{v'}{\rho}\right)\cos\varphi - \left(\frac{dv'}{ds} + \frac{u'}{\rho}\right)\operatorname{sen}\varphi,$$

dove ρ è il raggio di curvatura, ed è eguale a $\frac{ds}{d\varphi}$. Poichè l'asse delle x è di posizione arbitraria, si prenda in modo che la tangente durante il suo movimento sia parallela ad esso nell'istante che si considera; allora $\varphi=0$ ed abbiamo

$$0 = \frac{du'}{ds} - \frac{v'}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Similmente, prendendo l'asse delle x parallelo alla normale,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv'}{ds} + \frac{u'}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Queste quattro equazioni sono sufficienti per determinare u', v', φ e T in termini di s e t.

221. Le equazioni (2) e (3) si possono anche ottenere nel modo seguente. Il movimento del punto P del filo essendo rappresentato dalle velocità u' e v' secondo la tangente PA e la normale PO in P, il movimento di un punto consecutivo Q sarà rappresentato dalle velocità $u'+du'$ e $v'+dv'$ secondo la tangente QB, e la normale QO in Q. Sia l'arco $PQ=ds$, e sia QN perpendicolare a PA. Poichè il filo è inestensibile, la velocità risultante di Q risoluta secondo la tangente in P deve essere ultimamente la stessa della parte risoluta di P nella stessa direzione. Quindi

$$(u' + du') \cos d\varphi - (v' + dv') \operatorname{sen} d\varphi = u',$$

o, passando al limite, $du' - v'\,d\varphi = 0$;

onde
$$\frac{du'}{ds} - \frac{v'}{\rho} = 0.$$

Ancora, $\frac{d\varphi}{dt}$ è la velocità angolare di PQ intorno a P. Quindi la differenza delle velocità di P e Q risolute in una direzione qualunque che è ultimamente perpendicolare a PQ deve essere eguale a $PQ\,\frac{d\varphi}{dt}$; onde

$$(u' + du') \operatorname{sen} d\varphi + (v' + dv') \cos d\varphi - v = ds\,\frac{d\varphi}{dt},$$

o nel limite
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv'}{ds} + \frac{u'}{\rho}.$$

222. Se il filo è estensibile, le equazioni dinamiche diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{du'}{dt} - v'\frac{d\varphi}{dt} &= X' + \frac{dT}{m\,d\sigma} \\ \frac{dv'}{dt} + u'\frac{d\varphi}{dt} &= Y' + \frac{T}{m\rho}\frac{ds}{d\sigma} \end{aligned}\right\}.$$

Per trovare le equazioni geometriche, possiamo differenziare

$$u = u' \cos\varphi - v' \operatorname{sen}\varphi$$

rispetto a σ. Questo dà per l'Art. 219

$$-\operatorname{sen}\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}(T\cos\varphi) = \left(\frac{du'}{d\sigma} - \frac{v'}{\rho}\frac{ds}{d\sigma}\right)\cos\varphi$$
$$- \left(\frac{dv'}{d\sigma} + \frac{u'}{\rho}\frac{ds}{d\sigma}\right)\operatorname{sen}\varphi.$$

Con lo stesso ragionamento come nell'Art. 220, questo si riduce ad

$$\frac{1}{\lambda}\frac{dT}{dt}=\frac{du'}{d\sigma}-\frac{v'}{\rho}\left(1+\frac{T}{\lambda}\right),$$

$$\frac{d\varphi}{dt}\left(1+\frac{T}{\lambda}\right)=\frac{dv'}{d\sigma}+\frac{u'}{\rho}\left(1+\frac{T}{\lambda}\right).$$

Sul Movimento fermo.

223. Def. Quando il movimento di un filo è tale che la curva che esso forma nello spazio è sempre eguale, simile e similmente situata a quella che esso formava nella sua posizione iniziale, quel movimento si può chiamare fermo.

224. Prop. *Investigare il movimento fermo di un filo inestensibile.*

È chiaro che ogni elemento del filo è animato da due velocità, una dovuta al movimento della curva nello spazio, e l'altra al movimento del filo lungo la curva che esso forma nello spazio. Siano a e b le parti risolute secondo gli assi della velocità della curva al tempo t, e sia c la velocità del filo lungo la sua curva.

Allora, seguendo la solita notazione, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} u&=a+c\cdot\cos\varphi \\ v&=b+c\cdot\text{sen}\,\varphi \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

Ora a, b, c sono funzioni di t solamente, quindi

$$\frac{du}{ds}=-c\,\text{sen}\,\varphi\frac{d\varphi}{ds}.$$

Ma $$\frac{du}{ds}=-\text{sen}\,\varphi\frac{d\varphi}{dt}\ \text{per l'Art. 218};$$

onde $$\frac{d\varphi}{dt}=c\frac{d\varphi}{ds}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Sostituendo i valori di a e b nelle equazioni del moto, Art. 217, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt}+\frac{dc}{dt}\cos\varphi-c\,\text{sen}\,\varphi\frac{d\varphi}{dt}&=X+\frac{d}{ds}\left(\frac{T}{m}\cos\varphi\right) \\ \frac{db}{dt}+\frac{dc}{dt}\text{sen}\,\varphi+c\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}&=Y+\frac{d}{ds}\left(\frac{T}{m}\text{sen}\,\varphi\right) \end{aligned}\right\}.$$

Sostituendo per $\frac{d\varphi}{dt}$ queste equazioni si riducono a

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\left(X-\frac{dc}{dt}\cos\varphi\right)+\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{T}{m}-c^2\right)\cos\varphi\right\}\\ \frac{db}{dt}&=\left(Y-\frac{dc}{dt}\operatorname{sen}\varphi\right)+\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{T}{m}-c^2\right)\operatorname{sen}\varphi\right\}\end{aligned}\right\}\ \ldots.\ (3).$$

La forma della curva deve essere indipendente da t; quindi, eliminando T, l'equazione risultante non deve contenere t. Questo non accadrà generalmente a meno che $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ non siano tutti costanti. In ogni caso i loro valori saranno determinati dalle note circostanze del Problema. Le equazioni precedenti si debbono allora risolvere, supponendo s la sola variabile indipendente, e t costante.

225. Se il filo si muove uniformemente nello spazio, e gli elementi del filo scorrono uniformemente lungo il filo, $\frac{da}{dt}=0$, $\frac{db}{dt}=0$, $\frac{dc}{dt}=0$. Seguirà allora dalle equazioni precedenti, che la forma del filo sarà la stessa come se esso fosse in quiete, ma la tensione eccederà la tensione stazionaria di mc^2.

Su i Movimenti iniziali.

226. *Un filo, sotto l'azione di forze qualunque in un piano, incomincia a muoversi da uno stato di quiete nella forma di una curva data qualunque. Trovare la tensione iniziale in ogni punto dato.*

Siano Pds, Qds le parti risolute delle forze rispettivamente secondo la tangente e la normale ad un elemento qualunque ds. La forza P è presa positivamente quando essa agisce nella direzione in cui si misura s, e Q è positiva quando essa agisce nella direzione in cui si misura ρ lungo la normale nell'interno.

Siano u, v le velocità dell'elemento secondo la tangente e la normale. Allora le equazioni del moto sono per l'Art. 220

$$\frac{du}{dt}-v\frac{d\varphi}{dt}=P+\frac{dT}{ds}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1),$$

$$\frac{dv}{dt}+u\frac{d\varphi}{dt}=Q+\frac{T}{\rho}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2),$$

dove T è la tensione, ρ il raggio di curvatura, e φ l'angolo che

la tangente fa con una linea retta fissa qualunque. Le equazioni geometriche sono

$$\frac{du}{ds}-\frac{v}{\rho}=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(3),$$

$$\frac{dv}{ds}+\frac{u}{\rho}=\frac{d\varphi}{dt} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(4).$$

Differenziando (1) e moltiplicando (2) per $\frac{1}{\rho}$, otteniamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{ds\,dt}-v\frac{d^2\varphi}{ds\,dt}-\frac{dv}{ds}\frac{d\varphi}{dt}&=\frac{dP}{ds}+\frac{d^2T}{ds^2}\\ \frac{1}{\rho}\frac{dv}{dt}+\frac{u}{\rho}\frac{d\varphi}{dt}&=\frac{Q}{\rho}+\frac{T}{\rho^2}\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(5).$$

Ma differenziando (3) abbiamo, essendo $\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds}$,

$$\frac{d^2u}{ds\,dt}-v\frac{d^2\varphi}{ds\,dt}-\frac{1}{\rho}\frac{dv}{dt}=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(6).$$

Quindi, sottraendo la seconda delle equazioni (5) dalla prima, abbiamo da (4) e (6)

$$\frac{d^2T}{ds^2}-\frac{T}{\rho^2}+\frac{dP}{ds}-\frac{Q}{\rho}=-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Nel principio del movimento immediatamente dopo che il filo è stato messo in vibrazione possiamo trascurare i quadrati delle piccole quantità, quindi $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ si può trascurare. Quindi abbiamo

$$\frac{d^2T}{ds^2}-\frac{T}{\rho^2}=-\frac{dP}{ds}+\frac{Q}{\rho} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(7).$$

Questa è l'equazione generale per determinare la tensione di un filo immediatamente dopo che è stato messo in vibrazione.

Le due costanti arbitrarie introdotte nella soluzione di questa equazione si debbono determinare dalle circostanze del caso che si considera. Se tutti e due gli estremi del filo sono liberi, dobbiamo avere $T=0$ nei due estremi.

Siccome il filo incomincia a muoversi da uno stato di quiete abbiamo inizialmente $u=0$, $v=0$. Alla fine di un tempo dt, $\frac{du}{dt}dt$ e $\frac{dv}{dt}dt$ saranno le velocità di un elemento qualunque del filo.

Quindi se ψ è l'angolo che la direzione iniziale del movimento di un elemento qualunque del filo fa con la tangente all'elemento, abbiamo dalle equazioni (1) e (2)

$$\tan\psi = \frac{Q + \frac{T}{\rho}}{P + \frac{dT}{ds}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Si deve rammentare che le costanti dell'integrazione sono necessariamente costanti solamente per la lunghezza del filo al tempo $t=0$. Esse possono essere funzioni di t e possono essere continue o discontinue. Per esempio, se un punto del filo è assolutamente fisso nello spazio, l'azione trasversale del punto fisso sul filo può fare che le costanti diventino discontinue in quel punto. In questo caso l'equazione (8) non è necessariamente vera nella vicinanza immediata del punto fisso.

227. *Un filo è in equilibrio sotto l'azione di forze in un piano. Supponendo che il filo sia messo in vibrazione in un punto dato qualunque, trovare il cambiamento istantaneo di tensione.*

Sia T_0 la tensione in un punto qualunque (x, y) immediatamente prima che il filo sia messo in vibrazione. Allora le forze P, Q soddisfano le equazioni di equilibrio

$$0 = P + \frac{dT_0}{ds}, \quad 0 = Q + \frac{T_0}{\rho}.$$

Quindi

$$-\frac{dP}{ds} + \frac{Q}{\rho} = \frac{d^2T_0}{ds^2} - \frac{T_0}{\rho^2}.$$

Se T' è il cambiamento istantaneo di tensione, abbiamo $T'=T-T_0$. L'equazione dell'ultimo articolo diviene perciò

$$\frac{d^2T'}{ds^2} - \frac{T'}{\rho^2} = 0.$$

228. *Un filo poggia sopra una tavola orizzontale levigata ed è sollecitato in una estremità da una tensione impulsiva, trovare la tensione impulsiva in un punto qualunque ed il movimento iniziale.*

Sia T la tensione impulsiva in un punto qualunque P, $T+dT$ la tensione in un punto consecutivo Q, allora l'elemento PQ è sollecitato dalle tensioni T e $T+dT$ alle estremità. Sia φ l'angolo che la tangente in P al filo fa con una linea fissa qualunque; u, v le velocità iniziali dell'elemento risolute rispettiva-

mente secondo la tangente e la normale in P al filo. Allora, risolvendo secondo la tangente e la normale, abbiamo

$$\left.\begin{aligned} uds &= (T+dT)\cos d\varphi - T \\ vds &= (T+dT)\,\text{sen}\, d\varphi \end{aligned}\right\};$$

quindi passando al limite

$$u = \frac{dT}{ds}, \qquad v = \frac{T}{\rho}.$$

Ma per l'Art. 221, abbiamo $\frac{du}{ds} = \frac{v}{\rho}$. Quindi l'equazione per trovare T diviene

$$\frac{d^2T}{ds^2} - \frac{T}{\rho^2} = 0.$$

Questa, come si poteva prevedere per considerazioni meccaniche, è la stessa che l'equazione nell'Art. 227.

229. L'equazione per trovare T non si può integrare in un modo generale. Diversi casi si troveranno discussi nelle *Differential Equations* di Boole, si vegga il Capitolo XVII.

Se $\rho = \frac{(s-a)(s-b)}{\beta}$ si può mostrare che l'integrale è

$$T = A(s-a)^m (s-b)^n + B(s-a)^n (s-b)^m,$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie ed (m, n) sono le radici dell'equazione quadratica

$$x^2 - x - \left(\frac{\beta}{a-b}\right)^2 = 0.$$

Se $\rho = as^{\frac{2i}{2i\pm1}}$ l'equazione si può ridurre all'equazione di Riccati ponendo $T = e^{\int T' ds}$.

230. Es. *Un filo è in equilibrio in forma di un circolo intorno ad un centro di forza ripulsiva nel centro. Se il filo è ora messo in vibrazione in un punto A, dimostrare che la tensione in un punto qualunque P si cambia istantaneamente nel rapporto di*

$$1 - \frac{e^{\pi-\theta} + e^{-(\pi-\theta)}}{e^{\pi} + e^{-\pi}} : 1,$$

dove θ è l'angolo sotteso al centro dall'arco AP.

Sia F la forza centrale, allora $P=0$, e $Q=-F$. Sia a il raggio del circolo. Allora l'equazione diviene

$$\frac{d^2T}{ds^2}-\frac{T}{a^2}=-\frac{F}{a}.$$

Sia s misurato dal punto A verso P, allora $s=a\theta$; inoltre F è indipendente da s. Quindi abbiamo

$$T=Fa+Ae^{\theta}+Be^{-\theta}.$$

Per determinare le costanti arbitrarie A e B abbiamo la condizione $T=0$ quando $\theta=0$ e $\theta=2\pi$; onde

$$T=Fa\cdot\left\{1-\frac{e^{\pi-\theta}+e^{-(\pi-\theta)}}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right\}.$$

Ma immediatamente prima che il filo sia messo in vibrazione

$$T=Fa.$$

Quindi ne segue il risultato dato nell'enunciato.

Piccole Oscillazioni.

231. Prop. *Un filo inelastico è sospeso da due punti fissi sotto l'azione della gravità sicchè esso pende in forma di una catenaria, il parametro della quale è c. Una piccola perturbazione essendo data al filo nel suo proprio piano si cerca di determinare l'equazione generale delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di quiete.*

Sia α l'angolo che la tangente in un punto qualunque fa con l'orizzonte quando il filo è in quiete, ed $\alpha+\varphi$ l'angolo fatto dalla tangente nello stesso punto del filo al tempo t.

Siano u, v le velocità di un elemento qualunque ds del filo risolute secondo la tangente e la normale, e T' la tensione dell'elemento. La massa di una unità di lunghezza si prenda per unità. Allora le equazioni generali del movimento del filo sono per l'Art. 220,

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}-v\frac{d\varphi}{dt}&=-g\,\mathrm{sen}(\alpha+\varphi)+\frac{dT'}{ds}\\ \frac{dv}{dt}+u\frac{d\varphi}{dt}&=-g\cos(\alpha+\varphi)+\frac{T'd(\alpha+\varphi)}{ds}\end{aligned}\right\}.$$

Si prenda la direttrice della catenaria per asse delle x, e si misuri s da quel punto del filo che coincide col punto più basso

della catenaria quando il filo è nella posizione di equilibrio. Allora la tensione quando il filo è in quiete è gy, che è eguale a $\frac{gc}{\cos\alpha}$.

Sia $T' = \frac{gc}{\cos\alpha} + T$. Inoltre $\tan\alpha = \frac{s}{c}$; onde

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos^2\alpha}{c} \text{ e } \frac{dT'}{ds} = \frac{\cos^2\alpha}{c} \cdot \frac{dT'}{d\alpha}.$$

Sostituendo questi valori di T' e $\frac{dT'}{ds}$, e rammentando che nelle piccole oscillazioni possiamo trascurare i quadrati ed i prodotti delle piccole quantità u, v, φ, otteniamo

$$\frac{du}{dt} = -g\cos\alpha\cdot\varphi + \frac{\cos^2\alpha}{c}\frac{dT}{d\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\frac{dv}{dt} = g\,\text{sen}\,\alpha\cdot\varphi + g\cos\alpha\cdot\frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{c}\cdot T \ldots (2).$$

Abbiamo inoltre dall' Art. 220 le due equazioni geometriche,

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{ds} - \frac{v}{\rho} &= 0 \\ \frac{dv}{ds} + \frac{u}{\rho} &= \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\},$$

dove $\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}$ è il reciproco del raggio di curvatura.

Prendendo per variabile indipendente α e trascurando i quadrati delle piccole quantità, queste si riducono a

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{du}{d\alpha} \\ \frac{d^2u}{d\alpha^2} + u &= \frac{c}{\cos^2\alpha}\frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Per brevità poniamo u', v', φ'' per $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ rispettivamente.

Per risolvere queste equazioni, dobbiamo eliminare T dalle equazioni (1) e (2). Differenziando la seconda equazione, otteniamo

$$\frac{d^2u'}{d\alpha^2} = g\cos\alpha\cdot\varphi + g\cos\alpha\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \frac{\cos^2\alpha}{c}\frac{dT}{d\alpha} - \frac{2\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha}{c}T.$$

Sottraendo l'equazione (1) da questo risultato, abbiamo

$$\frac{d^2u'}{d\alpha^2} - u' = g\cos\alpha\left(\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 2\varphi\right) - \frac{2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}{c}\,T.$$

Eliminando T da questa per mezzo di (2), otteniamo

$$\cos\alpha\left(\frac{d^2u'}{d\alpha^2} + u'\right) + 2\left(\mathrm{sen}\,\alpha\,\frac{du'}{d\alpha} - u'\cos\alpha\right) = g\cos^2\alpha\,\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}$$
$$+ 2g\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\frac{d\varphi}{d\alpha} + 2g\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Ma da (3)

$$\frac{d^2u'}{d\alpha^2} + u' = \frac{c}{\cos^2\alpha}\,\varphi'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

onde

$$\mathrm{sen}\,\alpha\,\frac{du'}{d\alpha} - u'\cos\alpha = c\int\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}\,\varphi''\,d\alpha,$$

sostituendo queste in (4), abbiamo

$$\frac{c}{\cos\alpha}\,\varphi'' + 2c\int\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}\,\varphi''d\alpha = g\left(\cos^2\alpha\,\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\,\frac{d\varphi}{d\alpha} + 2\varphi\right).$$

Differenziando di nuovo, abbiamo

$$\frac{c}{\cos\alpha}\,\frac{d\varphi''}{d\alpha} + \frac{3c\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}\,\varphi'' = g\cos^2\alpha\left(\frac{d^3\varphi}{d\alpha^3} + 4\frac{d\varphi}{d\alpha}\right);$$

onde

$$\frac{\cos^3\alpha\,\frac{d\varphi''}{d\alpha} + 3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\varphi''}{\cos^6\alpha} = \frac{g}{c}\left(\frac{d^3\varphi}{d\alpha^3} + 4\frac{d\varphi}{d\alpha}\right);$$

integrando i due membri, abbiamo

$$\frac{\varphi''}{\cos^3\alpha} = \frac{g}{c}\left\{\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 4\varphi + f(t)\right\}.$$

Ritornando alla notazione originale, questa si può scrivere

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{c}\cos^3\alpha\left\{\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 4\varphi + f(t)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Questa è l'equazione generale per determinare le piccole oscillazioni di un filo rallentato.

Supponendo effettuata l'integrazione di questa equazione, abbiamo φ espresso in termini di α e t con due nuove funzioni arbitrarie di α e t. Queste le possiamo rappresentare con $\psi(P)$ e $\chi(Q)$ dove ψ e χ sono funzioni arbitrarie di due determinate

combinazioni P e Q delle variabili. I valori di u e v si possono allora trovare per mezzo di (3); le funzioni complementari introdotte da questo procedimento saranno della forma

$$\left.\begin{aligned} u &= A\cos\alpha + B\,\text{sen}\,\alpha \\ v &= -A\,\text{sen}\,\alpha + B\cos\alpha \end{aligned}\right\},$$

dove A e B sono due altre funzioni arbitrarie di t. Queste corrispondono ad un movimento nello spazio del filo senza alcun cambiamento di forma. Così A e B sono le parti risolute, parallele rispettivamente alla direttrice e all'asse della catenaria, della velocità comune di ogni elemento del filo. Siccome l'equazione (6) si è ottenuta differenziando (4) e finalmente integrando di nuovo, la funzione arbitraria $f(t)$ così introdotta si può determinare in termini di A e B etc. sostituendo nell'equazione (4).

Abbiamo così quattro funzioni arbitrarie i di cui valori si debbono determinare dalle condizioni della questione. Siano α_0, α_1, i valori di α che corrispondono alle due estremità fisse del filo. Allora i valori di φ e di $\frac{d\varphi}{dt}$ sono dati dalla questione quando $t=0$ per tutt'i valori di α da $\alpha=\alpha_0$ ad $\alpha=\alpha_1$; inoltre i valori iniziali di A e B sono dati. Così i valori di $\psi(P)$ e $\chi(Q)$ sono determinati per tutt'i valori di P e Q tra i due limiti che corrispondono ad $\alpha=\alpha_0$, $t=0$ ed $\alpha=\alpha_1$, $t=0$. Le forme di ψ e χ per i valori di P e Q esteriori a questi limiti, ed i valori di A e B quando t non è zero si debbono trovare dalle condizioni che crescendo t, u e v debbono svanire entrambe per tutt'i valori di t quando $\alpha=\alpha_0$ ed $\alpha=\alpha_1$. Può accadere perciò che le funzioni arbitrarie A, B, ψ e χ siano discontinue. Da un'altra parte le condizioni iniziali possono essere tali che queste funzioni siano tutte continue.

232. La tensione del filo sarà data dall'equazione (2), ma si può trovare ancora un'altra espressione come segue.

Differenziando (2) ed aggiungendo il risultato ad (1), otteniamo evidentemente da (5),

$$\frac{c}{\cos^2\alpha}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\cos\alpha\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 2\frac{\cos^2\alpha}{c}\frac{dT}{d\alpha} + \frac{T}{c}\frac{d\cos^2\alpha}{d\alpha},$$

o
$$\cos\alpha\frac{dT}{d\alpha} - \text{sen}\,\alpha\cdot T = \frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{\cos^3\alpha}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{g}{c}\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\right)$$
$$= \frac{cg}{2}\left\{4\varphi + f(t)\right\};$$

quindi $$\cos\alpha \cdot T = \frac{cg}{2}\int \{4\varphi + f(t)\}\, d\alpha\,;$$

onde $$T = \frac{cg}{2\cos\alpha}\left\{ f(t)\alpha + 4\int \varphi\, d\alpha \right\}.$$

233. Supponendo che il valore di φ sia stato trovato dall'equazione (6), si può domandare di riferire il movimento ad assi fissi nello spazio. Si prendano per assi delle coordinate la direttrice e l'asse della catenaria. Siano $(x+\xi,\ y+\eta)$ le coordinate del punto che quando in quiete era situato nel punto (x, y), dobbiamo trovare ξ ed η in termini di φ. Sia PQ un elemento qualunque dell'arco della catenaria che al tempo t è stato spostato nella posizione $P'\,Q'$. Sia α l'angolo che PQ fa con l'asse delle x, allora $\alpha+\varphi$ è l'angolo che $P'\,Q'$ fa con lo stesso asse. Inoltre dx e dy sono le proiezioni di PQ sugli assi; $dx+\frac{d\xi}{ds}ds$, $dy+\frac{d\eta}{ds}ds$, sono le proiezioni corrispondenti di $P'Q'$; quindi

$$dx + \frac{d\xi}{ds}ds = ds\cos(\alpha+\varphi)$$

$$= ds(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\varphi).$$

Ma $$dx = ds\cos\alpha,$$

e $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{s}{y}\,;$$

quindi $$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{s}{y}\varphi.$$

Similmente $$\frac{d\eta}{ds} = \frac{c}{y}\varphi.$$

234. *Una catena di lunghezza* 2l *è legata a due punti* A *e* B *nella stessa linea orizzontale la di cui distanza scambievole è prossimamente eguale a* 2l. *Trovare le piccole oscillazioni della catena in un piano verticale.*

Il movimento della catena si può dedurre dall'equazione dell'Art. 231, ma per mostrare i metodi diversi di procedere, incominceremo dal riferire il movimento ad assi fissi nello spazio.

Quando è in equilibrio la catena penderà nella forma di una catenaria. Sia C il punto più basso della catenaria e sia l'arco s misurato da C come origine. Si prendano per assi delle coordinate la direttrice e l'asse della catenaria, l'asse delle x essendo

orizzontale. Sia m la massa di una unità di lunghezza della catena, allora la tensione in un punto qualunque della catena la di cui ordinata è y, sarà mgy.

Quando la catena è in movimento siano $(x+\xi,\ y+\eta)$ le coordinate dell'elemento le di cui coordinate in equilibrio erano (x,y), e la tensione T' in quel punto sia

$$T' = mg(y+z).$$

Le equazioni del movimento dell'Art. 217 diventano

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g\frac{d}{ds}\left\{(y+z)\left(\frac{dx}{ds}+\frac{d\xi}{ds}\right)\right\}$$

$$= g\frac{d}{ds}\left\{c + y\frac{d\xi}{ds} + z\frac{dx}{ds}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1),$$

poichè siccome la tensione orizzontale è costante ed eguale ad mgc, possiamo porre $mgy\dfrac{dx}{ds} = mgc$, inoltre come nell'Art. 231 i termini che sono dell'ordine ξ^2, η^2, ζ^2 si trascurano,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = g\frac{d}{ds}\left\{(y+z)\left(\frac{dy}{ds}+\frac{d\eta}{ds}\right)\right\} - g$$

$$= g\frac{d}{ds}\left\{y\frac{d\eta}{ds} + z\frac{dy}{ds}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2),$$

con simile ragionamento.

L'equazione geometrica è chiaramente

$$\left(dx + \frac{d\xi}{ds}ds\right)^2 + \left(dy + \frac{d\eta}{ds}ds\right)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

la quale, essendo $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{s}{c}$, si riduce a

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{s}{c}\frac{d\eta}{ds} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Per risolvere queste equazioni, integriamo le equazioni (1) e (2) rispetto ad s ed eliminiamo z; abbiamo

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\int\eta ds - \frac{s}{c}\int\xi ds\right\} = gy\left(\frac{d\eta}{ds} - \frac{s}{c}\frac{d\xi}{ds}\right) \quad\ldots\ldots\ (4).$$

La distanza tra i punti di sostegno A e B è per le condizioni del problema non molto diversa dalla lunghezza della catena.

Quindi il parametro c della catenaria è grande. Il secondo termine in ciascun membro di questa equazione è perciò molto più piccolo del primo. Di più, vediamo dall'equazione (3), che lo spostamento orizzontale di ogni elemento della catena è molto più piccolo di η lo spostamento verticale. Così il rapporto del secondo termine al primo in ciascun membro dell'equazione è dell'ordine $\left(\frac{s}{c}\right)^2$. La parte principale di η si troverà trascurando questi due termini. Possiamo porre inoltre $y=c$.

Dobbiamo rammentare però che le integrazioni rispetto ad s introdurranno funzioni arbitrarie di t. Queste non sono tutte dell' ordine $\left(\frac{s}{c}\right)^2$ ed esse possono perciò essere ritenute. Poniamo

$$\xi=-\int\frac{s}{c}\frac{d\eta}{ds}+A \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5);$$

onde

$$\int\xi\,ds=-\iint\frac{s}{c}\frac{d\eta}{ds}(ds)^2+As+Bc \;\ldots\ldots\; (6),$$

dove A e B sono due funzioni arbitrarie di t da determinarsi con le condizioni della questione. L'equazione (4) diverrà ora

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\int\eta ds-A\frac{s^2}{c}-Bs\right\}=gc\frac{d^2}{ds^2}\left\{\int\eta ds-A\frac{s^2}{c}-Bs\right\}+2gA..(7).$$

L' integrale di questa equazione si sa essere

$$\int\eta ds-A\frac{s^2}{c}-Bs=2gE+h\frac{s^2}{c}+ks$$
$$+f(\sqrt{gc}\,t-s)+F(\sqrt{gc}\,t+s)\;\ldots\ldots\ldots\; (8),$$

dove E è una funzione di t, ed h, k sono due costanti tali che

$$\frac{d^2E}{dt^2}=A+h.$$

Le funzioni arbitrarie f ed F debbono essere determinate dalle condizioni della quistione e possono essere continue o discontinue. Supponiamo che il movimento della catena sia tale da poter rimpiazzare le funzioni con un numero finito di termini trigonometrici della forma

$$L\,\text{sen}\,m(\sqrt{gc}\,t\pm s).$$

Sia $m\sqrt{gc}=n$, abbiamo allora

$$\eta = 2(A+h)\frac{s}{c} + B + k + \Sigma \{ L\,\text{sen}(nt + ms + \beta) + M\text{sen}(nt - ms + \gamma) \}$$

$$\xi = -(A+h)\frac{s^2}{c^2} + A$$

$$- \Sigma \left\{ L\frac{s}{c}\,\text{sen}\,(nt + ms + \beta) + \frac{L}{cm}\cos\,(nt + ms + \beta) \right.$$

$$\left. + M\frac{s}{c}\,\text{sen}\,(nt - ms + \gamma) - \frac{M}{cm}\cos(nt - ms + \gamma) \right\} \ldots\ldots (9),$$

dove Σ implica la somma per tutt' i valori di m, ed L, M sono costanti qualunque che possono essere differenti in ogni termine.

Se tutte e due le estremità del filo sono fisse i valori di ξ ed η sono interamente periodici ed in questo caso $h=0$. Le funzioni A e B saranno delle forme $A_0\,\text{sen}\,(nt+\beta)$ e $B_0\,\text{sen}\,(nt+\beta)$, dove A_0 e B_0 sono costanti assolute. Per determinare le relazioni tra le costanti A_0, B_0, L, ed M abbiamo le condizioni $\xi=0$, $\eta=0$ quando $s=\pm l$. Se prendiamo la differenza tra le due equazioni dedotte dal valore di ξ ponendo $s=\pm l$ troviamo

$$\{ L\,\text{sen}\,(nt + \beta) + M\,\text{sen}\,(nt + \gamma) \} \,(ml \cos ml - \text{sen}\,ml) = 0.$$

Uno di questi fattori deve perciò svanire per tutt'i valori di t. Se il primo fattore si eguaglia a zero abbiamo $\gamma=\beta$ ed $M=-L$. Se il secondo fattore si eguaglia a zero, i valori possibili di m debbono soddisfare l'equazione $\tan ml = ml$. Consideriamo questi casi in ordine.

Primo. Se $\gamma=\beta$ ed $M=-L$, troviamo poichè η deve svanire quando $s=\pm l$,

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{c}{l} L\,\text{sen}\,ml \cos\,(nt + \beta) \\ B &= 0 \end{aligned} \right\},$$

e poichè ξ deve svanire quando $s=\pm l$ abbiamo molto prossimamente

$$A = \frac{2}{cm} L\,(lm\,\text{sen}\,ml + \cos ml) \cos\,(nt + \beta).$$

Sarà sufficiente se questi due valori si accordano quando trascuriamo tutti i piccoli termini che contengono il fattore $\left(\frac{l}{c}\right)^2$.

Questo dà $ml \tan ml = -2\left(\frac{l}{c}\right)^2$ prossimamente, e quindi $ml = i\pi$ prossimamente, dove i è un intero qualunque. I valori di η e ξ saranno allora

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \Sigma\, 2L \operatorname{sen} ms \cos(nt+\beta) \\ \xi &= \Sigma\, \frac{2L}{mc}(\cos ml - \cos ms - ms \operatorname{sen} ms)\cos(nt+\beta) \end{aligned}\right\} (10),$$

dove m ha un valore qualunque dato dall' equazione $m = \frac{i\pi}{l}$.

In secondo luogo. Abbia m un valore qualunque dato dall' equazione $\tan ml = ml$. Troviamo nello stesso modo che i due valori di A non possono in generale accordarsi tra loro a meno che non sia $L = M$, e $\gamma = \beta$. Abbiamo allora $A = 0$. I valori di η e ξ saranno allora

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \Sigma\, 2L(\cos ms - \cos ml)\operatorname{sen}(nt+\beta) \\ \xi &= \Sigma\, \frac{2L}{mc}(\operatorname{sen} ms - ms\cos ms)\operatorname{sen}(nt+\beta) \end{aligned}\right\} \ldots(11),$$

dove m ha un valore qualunque dato dall' equazione $\tan ml = ml$.

Le radici dell' equazione $\tan ml = ml$ si possono trovare con approssimazione continua. La prima è zero, ma poichè m si trova nel denominatore di alcuni dei piccoli termini nella investigazione, questo valore non è ammissibile. Gli altri si possono esprimere con la formola $ml = (2i+l)\frac{\pi}{2} - \theta$, dove θ non è molto grande. Questo dà $\frac{2\pi}{n}$, che è il tempo della vibrazione della catena, eguale a $\frac{4}{2i+l}\cdot\frac{l}{\sqrt{gc}}$ prossimamente. Così i tempi della vibrazione di una catena leggermente disturbata e lasciata a sè stessa sono tutti piccoli. Il lettore che desidera vedere un altro metodo di discutere le piccole oscillazioni di una catena sospesa può consultare una memoria di Mr. Röhrs nel nono volume delle *Cambridge Transactions*.

235. In questa discussione abbiamo considerato solamente i termini principali di η e ξ. Ma avendo trovato questi, possiamo procedere ad una seconda approssimazione, sostituendo i valori trovati nei piccoli termini dell' equazione (4).

236. Come un esempio del modo di trattare l' oscillazione dei fili elastici, è stato scelto il seguente.

Un filo elastico il di cui peso si può trascurare e la di cui lunghezza non distesa è l *ha le sue estremità fisse in due punti la di cui distanza scambievole è* l'. *Il filo essendo molto leggermente disturbato dalla sua posizione di quiete, trovare il movimento.*

Sia A uno dei punti fissi, e sia AB il filo non disteso e situato in linea retta. L' estremità B sia tirata finchè raggiunga l' altro punto fisso B'. Sia PQ un elemento qualunque del filo non disteso, $P'Q'$ lo stesso elemento ad un tempo qualunque t. Sia $AP=x$, e siano le coordinate di P' (x', y', z'). Siano T e $T+dT$ le tensioni in P' e Q'. Sia M la massa del filo, allora $\frac{M}{l}\,dx$ è la massa della porzione dx. Quindi le equazioni del moto sono

$$\left.\begin{aligned}\frac{M}{l}\frac{d^2x'}{dt^2}&=\frac{d}{dx}\left(T\frac{dx'}{ds'}\right)\\ \frac{M}{l}\frac{d^2y'}{dt^2}&=\frac{d}{dx}\left(T\frac{dy'}{ds'}\right)\\ \frac{M}{l}\frac{d^2z'}{dt^2}&=\frac{d}{dx}\left(T\frac{dz'}{ds'}\right)\end{aligned}\right\},$$

dove ds' è la lunghezza dell' elemento $P'Q'$.

Ora se E è il modulo di elasticità abbiamo

$$\frac{ds'}{dx}=1+\frac{T}{E},$$

e
$$\left(\frac{ds'}{dx}\right)^2=\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2.$$

Queste cinque equazioni sono sufficienti per determinare il moto.

Poichè la perturbazione è molto piccola, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$ sono molto piccoli, e $\frac{dx'}{ds'}$ è prossimamente eguale all' unità. Quindi la prima equazione prende la forma

$$\frac{M}{l}\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{dT}{dx},$$

e la quinta equazione diviene

$$\frac{dx'}{dx}=1+\frac{T}{E},$$

onde
$$\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{El}{M}\,\frac{d^2x'}{dx^2}.$$

Se poniamo $a^2=\frac{El}{M}$, l'integrale di questa equazione è

$$x'=f(at-x)+F(at+x),$$

dove f ed F sono due funzioni arbitrarie. La discussione di queste equazioni si può trovare in un trattato sul suono. Il risultato si è che ciascuna di queste funzioni rappresenta un'onda che si propaga con la stessa velocità, cioè a. Nel caso perciò del filo, il movimento sarà rappresentato da una serie di onde che si propagano lungo il filo con la stessa velocità. Questa velocità è tale che il tempo per attraversare una lunghezza l del filo non disteso o una lunghezza l' del filo disteso è $\sqrt{\frac{Ml}{E}}$.

Supponiamo che quando il filo è sospeso verticalmente da A, $M'g$ sia il peso che distenderebbe il filo sino al doppio della sua lunghezza, allora $E=M'g$. Il tempo per attraversare la lunghezza l del filo non disteso è perciò $\sqrt{\frac{Ml}{M'g}}$.

Nella seconda equazione possiamo riguardare T come costante, le sue piccole variazioni essendo moltiplicate per la piccola quantità $\frac{dy'}{ds'}$.

Quindi possiamo porre

$$T=E\frac{l'-l}{l};$$

onde
$$\begin{aligned}\frac{dy'}{ds'}&=\frac{dy'}{dx}\,\frac{dx}{ds'}\\&=\frac{1}{1+\frac{T}{E}}\cdot\frac{dy'}{dx}\\&=\frac{l}{l'}\,\frac{dy'}{dx}.\end{aligned}$$

Quindi l'equazione diviene

$$\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{Tl^2}{Ml'}\,\frac{d^2y'}{dx^2}.$$

La velocità di propagazione lungo il filo non disteso è perciò $\sqrt{\frac{Tl^2}{Ml'}}$. Il tempo per traversare una lunghezza l del filo non disteso o l' del filo disteso è $\sqrt{\frac{l'M}{T}}$. Supponiamo il filo fisso in A e sospeso da una carrucola in B', con un peso M'' legato ad esso. Allora T essendo la tensione in equilibrio, abbiamo $T = M''g$. Quindi il tempo che un'onda impiega ad attraversare la lunghezza del filo da A a B' è $\sqrt{\frac{l'M}{gM''}}$.

La quistione del movimento di un filo disteso si considera meglio in connessione con la teoria del suono. Una discussione di questa questione si può trovare in quasi ogni trattato su questo soggetto. Per questa ragione non si è creduto necessario di dare più di questa sola proposizione.

ESEMPII.

* 1. Un anello elastico senza peso la di cui lunghezza quando non è disteso è data, è disteso intorno ad un cilindro circolare. Il cilindro è subitaneamente annichilato, mostrare che il tempo che l'anello impiegherà per ridursi alla sua naturale lunghezza è $\sqrt{\frac{Ma\pi}{8\lambda}}$, dove M è la massa dell'anello, λ il suo modulo di elasticità, ed a è il raggio naturale.

2. Un leggiero filo inestensibile omogeneo è attaccato nelle sue estremità a due punti fissi, e gira intorno alla linea retta che congiunge questi punti con uniforme velocità angolare. Trovare la forma del filo, supponendo la sua figura permanente.

Risultato. Si prenda per asse delle x la linea retta che congiunge i punti fissi, allora la forma del filo è una curva piana di cui l'equazione è

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{a - y^2}{b}\right)^2,$$

dove a e b sono due costanti.

3. Una catena uniforme indefinita è in equilibrio sotto l'azione di forze che dipendono solamente dalla posizione dell'elemento su cui agiscono. Ogni elemento ha un'eguale velocità comunicata ad esso nella direzione della tangente alla catena in quel-

l'elemento, dimostrare che la forma della catena non sarà alterata dal movimento.

4. Una gomena scenda con velocità c' da una nave che si muove con velocità uniforme c in una linea retta sulla superficie di un mare di profondità uniforme. Se la resistenza dell'acqua alla gomena è proporzionale al quadrato della velocità, il coefficiente, B, di resistenza per il movimento longitudinale essendo diverso dal coefficiente A, per il movimento laterale, dimostrare che la gomena può prendere la forma di una linea retta che fa un angolo λ con l'orizzonte, tale che $\cot^2\lambda = \sqrt{e^4 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, dove e è il rapporto della velocità della nave alla velocità finale di una lunghezza della gomena che cade lateralmente nell'acqua. Dimostrare inoltre che la tensione si troverà dall'equazione

$$T = \left\{ y - \frac{B}{A} c^2 \left(\frac{c'}{c} - \cos\lambda \right)^2 \frac{y}{\operatorname{sen}\lambda} \right\} mg'.$$

5. Un filo pesante è sospeso da una estremità, ed essendo leggermente disturbato fa piccole oscillazioni intorno alla verticale. Trovare la forma della curva in cui esso deve essere situato in quiete al tempo $t=0$, affinchè ogni punto del filo giunga alla verticale nello stesso tempo.

Risultato. Se il punto fisso è l'origine e l'asse delle x è condotto verticalmente in giù, l'equazione del filo al tempo t è $y = \varphi(x) \cos\sqrt{cg}\, t$, dove φ si deve determinare dall'equazione

$$(l - x) \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} + c\varphi = 0,$$

e c è una costante arbitraria che dipende dalla forma iniziale della curva.

6. Gli anelli estremi di una catena uniforme possono scorrere liberamente su due curve date in un piano verticale, ed il tutto è in equilibrio sotto l'azione della gravità. Supponendo che la catena si spezzi in un punto qualunque, dimostrare che la tensione iniziale in un punto qualunque è $T = y(A\varphi + B)$, dove y è l'altezza del punto al di sopra della direttrice della catenaria, φ l'angolo che la tangente fa con l'orizzonte, ed A e B due costanti arbitrarie. Spiegare come le costanti si debbono determinare.

7. Un filo è avvolto sulla parte inferiore di un circolo verticale ed è mantenuto in equilibrio agli estremi del diametro orizzontale da due forze. Il circolo essendo subitaneamente ri-

mosso, dimostrare che la tensione nel punto più basso decresce istantaneamente nel rapporto $4 : e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}$.

8. Spiegare in un modo generale perchè il marciare delle truppe in tempo lungo un ponte sospeso produrrà oscillazioni che possono diventare tanto grandi da essere pericolose al ponte.

9. Una catena pesante di lunghezza $2l$ è sospesa da due punti A e B nella stessa linea orizzontale la di cui distanza scambievole non è molto diversa da $2l$. Se in aggiunta alla gravità ogni elemento della catena è sollecitato da una piccola forza verticale la di cui grandezza è $f\,\text{sen}(at+bs)$, mostrare che i corrispondenti spostamenti verticali sono dati da

$$\eta = \frac{f}{gcb^2 - a^2}\,\text{sen}\,(at + bs).$$

Applicare questo risultato a mostrare che i groppi di vento che attraversano un ponte sospeso con una velocità prossimamente eguale a $\sqrt{gc}$ possono essere pericolosi al ponte.

10. Una catena pesante di lunghezza $2l$ è sospesa da due punti A, B nella stessa linea orizzontale la di cui distanza scambievole non è molto diversa da $2l$. Ciascun elemento della catena è leggermente disturbato dalla sua posizione di quiete in una direzione perpendicolare al piano verticale che passa per AB. Trovare le piccole oscillazioni della catena.

11. Un filo uniforme è in equilibrio in forma di un circolo intorno ad un centro di forza ripulsiva nel centro. Una piccola perturbazione essendo data al filo, trovare il moto.

12. Un filo pesante è sospeso da due punti fissi A e B ed è in equilibrio in forma di una catenaria il di cui parametro è c. Sia il filo inizialmente spostato, i punti di sostegno A, B essendo anche mossi, in modo che

$$\varphi = \sigma(1 + \cos 2\alpha) + \sigma' \,\text{sen}\, 2\alpha,$$

dove σ e σ' sono due piccole quantità e le altre lettere avendo lo stesso significato come nell'Art. 231. Se il filo è situato in quiete in questa nuova posizione, dimostrare che resterà sempre in quiete.

13. Un filo elastico poggia sopra una tavola perfettamente levigata, ed essendo attaccato nelle sue estremità a due punti fissi A e B' sulla tavola, è egualmente disteso da per tutto. L'estremità B' si scioglie subitaneamente, trovare il movimento del filo

FINE DELLA DINAMICA.

IDROSTATICA.

IDROSTATICA.

CAPITOLO I.

Equilibrio dei Fluidi.

1. Si dinota col nome di fluido un complesso di punti materiali in numero considerevole, situati a distanze abbastanza piccole gli uni dagli altri, perchè si possa, senza errore sensibile, considerare come continua la materia che li compone, eccetto nei casi in cui si considerano delle azioni che variano sensibilmente da una molecola ad un' altra. Si suppone di più che tutti questi punti possano essere spostati dal più piccolo sforzo e trasportati a distanze qualunque gli uni dagli altri. Questa ipotesi di una perfetta mobilità non è interamente esatta, e condurrebbe alcune volte a risultati poco conformi all'esperienza, quando si tratterà del movimento; ma, nell'equilibrio, si può riguardarla come esatta, senza che ne risulti alcun errore sensibile.

I fluidi si dividono in *liquidi*, ed in *gas* o fluidi *aeriformi*. I primi si chiamano anche fluidi *incompressibili*, perchè si è creduto per lungo tempo che fosse impossibile di diminuire il loro volume con la pressione; ma si è riconosciuto, in seguito, che essi erano realmente compressibili ad un debolissimo grado.

La parte della Statica che si occupa dell'equilibrio dei fluidi di ogni specie si chiama *Idrostatica*.

2. Allorchè un liquido, racchiuso in un vaso aperto o chiuso da ogni parte, è in equilibrio sotto l'azione di forze qualunque, esso esercita una pressione sulle pareti del vaso che lo trattengono. Questa pressione può variare da un punto ad un altro; per definirla con precisione, si considera un'estensione infinitamente piccola della parete, e si suppone che la forza che si esercita su di essa si riproduca con la stessa intensità e nella stessa direzione su tutti gli elementi di una superficie piana eguale all'u.

nità: la forza risultante è ciò che si chiama la pressione del liquido nel punto della parete che si considera. Si vede che ciò non è altra cosa che il limite del rapporto della forza prodotta sull'elemento infinitamente piccolo all'area di questo elemento.

Si può riguardare come un risultato dell'esperienza, o come una conseguenza della disposizione uniforme delle molecole del fluido le une intorno alle altre, che la direzione della pressione è sempre perpendicolare all'elemento della superficie sul quale essa si esercita; e siccome l'azione e la reazione sono sempre eguali, esiste in senso contrario una eguale pressione nell'estensione dello stesso elemento. Questo fatto può ancora essere considerato come rientrante in quell'altro più generale, che i corpi in contatto non esercitano l'uno sull'altro che azioni normali, quando le loro superficie non hanno alcuna aderenza nè attrito. Poichè, quando anche un liquido fosse suscettibile di attaccarsi alla parete, si potrebbe riguardare lo strato estremamente sottile che vi aderirebbe, come facendo parte della parete, ed il resto del liquido come potendo liberamente scorrere su di essa.

Ammetteremo, come risultato dell'esperienza, un'altra proprietà fondamentale dei fluidi, la quale consiste in ciò che, se una certa quantità di fluido, in equilibrio sotto l'azione di forze qualunque, riempie esattamente un vaso chiuso da ogni parte, e che per mezzo di uno stantuffo si esercita sopra una porzione della superficie di questo fluido una pressione qualunque, essa è transmessa con la stessa intensità sopra ogni porzione equivalente della superficie delle pareti; di maniera che sopra due parti diseguali, la pressione è in ragione diretta delle loro aree, purchè queste superficie sieno piane; nel caso delle superficie curve non sarebbe così che per porzioni infinitamente piccole.

Queste proposizioni si estendono alle pressioni interne come a quelle che si esercitano sulle pareti. Poichè l'equilibrio non sarebbe turbato, e gli sforzi resterebbero gli stessi, se si supponesse che, in una parte qualunque del liquido, tutt'i punti fossero connessi invariabilmente e costituissero un corpo solido. Si può dunque, in un punto qualunque dell'interno, ed in una direzione qualunque, supporre una parete solida; per conseguenza, la pressione esercitata sopra un elemento piano di questa parete gli sarà normale, qualunque ne sia la causa. Di più, se questa pressione proviene da un'altra pressione esercitata alla superficie del fluido racchiuso in un vaso pieno, essa sarà eguale alla prima per una estensione eguale in superficie. Si conclude da ciò che le proposizioni ammesse per le pressioni dei fluidi sulle pareti dei vasi che li contengono, si applicano alle pres-

sioni esercitate nel loro interno sopra ogni porzione di superficie che vi si vorrà considerare.

Infine, si dedurrà facilmente da ciò che in un punto qualunque del fluido, la pressione è la stessa, qualunque sia la direzione dell'elemento di superficie sul quale essa si esercita; infatti, se si concepisce intorno ad uno qualunque dei suoi punti un poliedro infinitamente piccolo formato dal liquido, e che lo si riguardi da principio come solidificato, esso è in equilibrio sotto l'influenza delle pressioni esercitate alla sua superficie e delle forze che sollecitano i suoi punti interni proporzionalmente alle loro masse. Queste ultime possono essere considerate come parallele, ed hanno per conseguenza una risultante di cui l'intensità sarà proporzionale alla massa del poliedro che è un infinitamente piccolo del terzo ordine; e siccome le sue facce sono degl'infinitamente piccoli del secondo ordine, al pari delle pressioni che esse sopportano, l'equilibrio potrà essere considerato come esistente sensibilmente tra queste pressioni soltanto. Se ora si rende al poliedro la sua fluidità primitiva, e che si solidifica il resto del liquido, che diviene allora come un vaso poliedrico chiuso da ogni parte e ripieno di liquido, nulla sarà cambiato nelle azioni scambievoli delle molecole e per conseguenza nelle pressioni che esse producono. Ora, risulta dalla proprietà generale dei fluidi, che le pressioni sulle pareti sono eguali per elementi eguali in superficie, qualunque sia la loro direzione; e siccome tutti questi elementi di superficie si avvicinano indefinitamente a passare per il punto considerato nel liquido, se ne deve conchiudere che, qualunque sia la direzione di un elemento piano, che passa per un punto qualunque di un fluido in equilibrio, la pressione esercitata su di esso e riferita all'unità di superficie è sempre la stessa.

3. Se si suppone un fluido incompressibile racchiuso in un vaso immobile e sottomesso a pressioni prodotte sulla sua superficie da un numero qualunque di stantuffi, il principio delle velocità virtuali avrà luogo nel caso dell'equilibrio di queste forze, riguardando come condizioni del sistema che il fluido resti continuo, di volume costante, e sempre in contatto con le basi degli stantuffi. Siano, in effetti, a, a', a'', etc., le aree di queste basi; le pressioni prodotte da questi stantuffi, riferite all'unità di superficie, saranno eguali; e se si dinota il loro valore con p, le forze applicate alla superficie del liquido saranno rispettivamente ap, $a'p$, $a''p$, etc. Siano δp, $\delta p'$, $\delta p''$, etc. le velocità virtuali dei punti di applicazione di queste forze valutate secondo le loro direzioni; esse saranno assoggettate alla condizione che il volume

del liquido non abbia variato per questo spostamento, e che non si sia operato alcun vuoto; donde risulta

$$a\delta p + a'\delta p' + a''\delta p'' + \ldots = 0\,,$$

e per conseguenza,

$$ap\delta p + a'p\delta p' + a''p\delta p'' + \ldots = 0\,,$$

il che dimostra che la somma dei momenti virtuali delle forze è eguale a zero.

Equazioni generali dell' equilibrio dei fluidi.

4. Siano X, Y, Z le componenti della forza, riferita all'unità di massa, che agisce nel punto di cui le coordinate sono x, y, z; dinotiamo con ρ la densità del liquido, e con p la pressione in questo punto, riferita all'unità di superficie; p e ρ sono funzioni di x, y, z che si propone di determinare quando l'equilibrio è stabilito.

Se al punto di cui le coordinate sono x, y, z si concepisce un parallelepipedo di cui gli spigoli siano paralleli agli assi e rispettivamente eguali ai differenziali dx, dy, dz, la sua massa dm sarà eguale a $\rho dx\, dy\, dz$ e sarà sollecitata dalle tre forze

$$\rho X\, dx\, dy\, dz, \quad \rho Y\, dx\, dy\, dz, \quad \rho Z\, dx\, dy\, dz\,;$$

le sue sei facce saranno sollecitate da forze parallele agli assi, e dirette verso l'interno del suo volume. Se si considerano da principio le due facce parallele al piano delle x ed y, di cui l'una passa pel punto di cui le coordinate sono x, y, z, e l'altra pel punto che ha per coordinate x, y, $z+dz$, la pressione esercitata sulla prima è $pdx\, dy$; e sulla seconda essa è

$$-\,dx\, dy\left(p + \frac{dp}{dz}\, dz\right),$$

$\frac{dp}{dz}$ essendo la derivata parziale di p rispetto a z. Ciascuna di esse può essere riguardata come costante in tutta l'estensione della faccia corrispondente, senza che ne risulti errore nelle equazioni, considerate nel limite. Le due forze alle quali si riducono le azioni esercitate rispettivamente su queste due facce sono dunque delle forze direttamente opposte, ed esse si compongono in una sola, parallela all'asse delle z ed eguale a

$$-\,dx\, dy\, dz\,\frac{dp}{dz}.$$

Similmente, le pressioni parallele all'asse delle y ed all'asse delle x si riducono alle forze

$$-dx\,dy\,dz\frac{dp}{dy}, \quad -dx\,dy\,dz\frac{dp}{dx}.$$

Queste tre forze possono essere considerate come agenti nel centro del parallelepipedo, del pari che la risultante delle forze applicate a tutt'i punti della sua massa, poichè queste forze debbono essere riguardate come costanti di grandezza e di direzione, e che la densità può essere supposta la stessa in tutt'i punti del parallelepipedo. È dunque necessario e sufficiente, per il suo equilibrio, che le forze parallele a ciascuno degli assi siano in equilibrio tra loro, ciò che dà le tre equazioni

$$(1) \qquad \frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per dx, dy, dz, e sommandole, viene

$$(2) \qquad dp = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\,;$$

ciò che apprende che se il fluido è in equilibrio, l'espressione

$$\rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

è il differenziale totale di una funzione di x, y, z, e che questa funzione dà necessariamente l'espressione della pressione, a meno di una costante arbitraria.

Dinotiamo questa funzione con $F(x,y,z)$, l'equazione (2) darà

$$(3) \qquad p = F(x, y, z) + C,$$

C essendo una costante arbitraria che si potrà determinare se si conosce la pressione in un punto dato. Se il fluido non è racchiuso in un vaso chiuso da ogni parte ed esattamente pieno, sarà necessario che alla parte libera della superficie vi sia una pressione esterna di cui il valore sia dato dall'equazione (3), e che sia diretta in ciascun punto verso l'interno del liquido.

5. *Superficie di livello.* In un fluido in equilibrio, si chiama *superficie di livello* ogni superficie tale che la risultante delle forze che agiscono sul liquido le sia normale in ciascuno dei suoi punti.

Se si dinotano dunque con dx, dy, dz gli accrescimenti infinitamente piccoli che prendono le coordinate x, y, z di un punto

qualunque di una di queste superficie quando si passa ad un altro punto di questa stessa superficie, si avrà la condizione

$$(4) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0;$$

questa è l'equazione differenziale di tutte le superficie di livello.

Ne risulta, in virtù dell'equazione (2), che per tutt'i punti di una stessa superficie di livello, si ha

$$dp = 0\ ,$$

e che per conseguenza la pressione vi è costante. Questa proprietà osservabile potrebbe servire di definizione a queste superficie, e quella che è espressa dall'equazione (4) ne sarebbe una conseguenza immediata.

L'equazione finita delle superficie di livello sarà, dinotando con c una costante arbitraria,

$$F(x, y, z) = c\ ,$$

$F(x, y, z)$ essendo sempre la funzione di cui il differenziale è

$$\rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Se la costante c prende successivamente tutt'i valori possibili, si otterranno tutte le superficie di livello. Queste superficie osservabili non possono incontrarsi se dei valori finiti di x, y, z danno sempre alla funzione $F(x, y, z)$ dei valori finiti e determinati; poichè allora non si potrebbe avere nello stesso tempo

$$F(x, y, z) = c, \quad \text{ed} \quad F(x, y, z) = c',$$

c e c' essendo differenti.

Se fosse altrimenti, le conseguenze precedenti non sussisterebbero più. Nei punti in cui due superficie di livello s'incontrerebbero, la pressione sarebbe indeterminata, e per conseguenza non si potrebbe più dire che la pressione sarebbe costante in tutta l'estensione di una stessa superficie di livello. Noi non considereremo i casi eccezionali in cui queste circostanze s'incontrerebbero.

Se la superficie libera del liquido è sottomessa ad una pressione costante in tutti i suoi punti, essa stessa è una superficie di livello.

6. Se $X dx + Y dy + Z dz$ è il differenziale totale di una funzione φ di x, y, z, come ciò ha luogo per esempio quando le forze date sono dirette verso dei centri fissi, e non dipendono che dalla di-

stanza da questi centri, l'equazione (2) può mettersi sotto la forma

$$dp = \rho d\varphi. \tag{5}$$

Il primo membro di questa equazione è il differenziale di una funzione delle variabili indipendenti x, y, z; è lo stesso di $d\varphi$; dunque, affinchè il secondo membro sia identico al primo, è necessario che ρ sia una funzione di φ; ma questa funzione può avere una forma qualunque.

Così la densità sarà costante nello stesso tempo che φ, vale a dire per tutt'i punti di una stessa superficie di livello; e queste superficie dividono il fluido in strati in cui la pressione e la densità non variano.

7. Nel caso dei fluidi compressibili, la densità dipende dalla pressione. Sia allora $\rho = f(p)$, l'equazione (5) diviene

$$d\varphi = \frac{dp}{f(p)}, \quad \text{onde} \quad \varphi = \int \frac{dp}{f(p)}.$$

La costante si determinerà pel valore dato della pressione in un punto conosciuto; si potrà ricavare di là p, e per conseguenza ρ in funzione di φ, e si conoscerà la densità e la pressione relativa ad una superficie qualunque di livello.

Supponiamo per esempio che si tratti di un gas; si avrà, secondo la legge di Mariotte,

$$p = k\rho,$$

k essendo dipendente dalla temperatura, che riguarderemo da principio come costante. L'equazione (5) darà

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\varphi}{k}, \quad \text{onde} \quad \log \frac{p}{C} = \frac{\varphi}{k}, \tag{6}$$

C essendo una costante che si determinerà pel valore di p corrispondente ad un valore conosciuto di φ.

L'ultima equazione può mettersi sotto la forma

$$p = Ce^{\frac{\varphi}{k}},$$

e si avrà per conseguenza

$$\rho = \frac{C}{k} e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Se la temperatura non è costante, k sarà variabile, ed allorchè

l' equilibrio sarà stabilito, l' equazione (6) apprende che k non potrà essere che una funzione di φ, e che per conseguenza la temperatura sarà costante per tutt' i punti di una stessa superficie di livello. La pressione e la densità saranno determinate dalle formole

$$p = Ce^{\int \frac{d\varphi}{k}}, \quad \rho = \frac{C}{k} e^{\int \frac{d\varphi}{k}}.$$

Considerando la terra come sferica, e facendo astrazione dal suo movimento di rotazione, la forza applicata alle molecole dell' aria è diretta verso il centro, e per conseguenza le superficie di livello saranno delle sfere concentriche alla terra. L'equilibrio dell' atmosfera esigerebbe dunque che la temperatura fosse da per tutto la stessa ad eguale distanza dalla superficie della terra, ciò che non può essere a motivo della presenza del sole. Donde segue che questo equilibrio non può aver luogo.

8. In luogo di considerare un liquido in equilibrio, nello stato di riposo, o animato da una velocità comune a tutt'i suoi punti, si potrebbe supporre che esso giri uniformemente intorno ad un asse fisso, e cercare le condizioni affinchè tutt' i suoi punti non si spostino gli uni rispetto agli altri. Basterà per ciò, secondo il principio di D' Alembert, che vi sia equilibrio in ciascun punto tra le forze date e le forze eguali ed opposte a quelle che produrrebbero su ciascun punto libero il movimento che esso ha realmente, vale a dire alle forze centripete.

L'equilibrio ha dunque luogo tra le forze date e le forze centrifughe considerate come applicate alle molecole stesse. Se la velocità angolare è dinotata da ω, le componenti della forza centrifuga saranno $\omega^2 x$, $\omega^2 y$ parallelamente agli assi delle x e delle y, e la terza sarà nulla se si prende l' asse di rotazione per asse delle z. Si avrà dunque, per determinare la pressione,

$$(7) \qquad dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2 xdx + \omega^2 ydy).$$

I termini introdotti dalla forza centrifuga dovranno dunque formare un differenziale esatto insieme con

$$\rho\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Le superficie di livello avranno per equazione comune

$$Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2 (xdx + ydy) = 0, \qquad \text{o} \qquad \varphi = c,$$

dinotando con φ la funzione di x, y, z di cui il primo membro moltiplicato per ρ è il differenziale, e con c una costante arbitraria.

Se la superficie libera del liquido, omogeneo o eterogeneo, è sottomessa ad una pressione costante, essa stessa sarà una superficie di livello, e la sua equazione sarà compresa nell' equazione generale $\varphi=c$. Se dunque si conosce il volume totale del liquido, e la forma del vaso nel quale esso è racchiuso, il valore della costante c si troverà determinato, come andiamo a vedere in un caso particolare.

9. Supponiamo un liquido omogeneo pesante, di cui la superficie libera sia sottomessa ad una pressione costante P, e che si trova rinchiuso in un cilindro verticale di cui il raggio della base è a, nel quale esso s' innalza ad un' altezza h nello stato di riposo. Prendiamo per asse delle z l'asse di questo cilindro nel senso opposto al peso.

Si avrà allora

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=-g,$$

e l' equazione (7) diviene

$$dp=-g\rho\, dz+\rho\omega^2(xdx+ydy).$$

L' equazione generale delle superficie di livello sarà

$$-gdz+\omega^2(xdx+ydy)=0,$$

donde

$$x^2+y^2=\frac{2g}{\omega^2}(z-c),$$

c essendo una costante arbitraria.

Questa equazione rappresenta dei paraboloidi di rivoluzione intorno all'asse delle z, e c è l' altezza del loro vertice al di sopra del piano della base.

La superficie libera, essendo sottomessa ad una pressione costante, è una superficie di livello, e la sua equazione si otterrà dando a c un valore particolare conveniente, nell'ultima equazione. Questo valore si otterrà calcolando il volume del liquido terminato alla superficie che essa rappresenta, ed eguagliando il risultato a $\pi a^2 h$. Si trova per sua espressione

$$\pi a^2 z-\frac{\pi g}{\omega^2}(z-c)^2,$$

z essendo il valore corrispondente al punto in cui la parabola generatrice incontra il cilindro, valore che è eguale a

$$c+\frac{a^2\omega^2}{2g}.$$

Si avrà dunque, per determinare c, l' equazione

$$\pi a^2 h = \pi a^2 c + \frac{\pi a^4 \omega^2}{4g},$$

d' onde si ricava

$$c = h - \frac{a^2\omega^2}{4g}.$$

L' equazione della superficie che termina il liquido è dunque

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\left(z + \frac{a^2\omega^2}{4g} - h\right).$$

Resta ora a determinare la pressione in un punto qualunque. Ora, integrando il valore di dp, si trova, dinotando con c una costante arbitraria,

$$p = -g\rho z + \rho\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + c',$$

e si determinerà c' esprimendo che alla superficie si ha $p = P$; si trova così

$$P = \frac{a^2\omega^2\rho}{4} - g\rho h + c',$$

onde

$$c' = P - \frac{a^2\omega^2\rho}{4} + g\rho h,$$

ciò che dà la soluzione completa della questione.

Si può osservare che, allorchè il liquido parte dalla quiete e perviene alla sua posizione di equilibrio nel movimento di rotazione, il punto della superficie libera che era sull'asse si è abbassato di quanto i punti in contatto col cilindro si sono elevati. Infatti, l' altezza c del vertice del paraboloide che termina il liquido è eguale ad $h - \frac{a^2\omega^2}{4g}$, e l'altezza dei punti del paraboloide che sono sulla superficie del cilindro è

$$c + \frac{a^2\omega^2}{2g}, \quad \text{o} \quad h + \frac{a^2\omega^2}{4g}.$$

Ora queste due altezze differiscono dall' altezza primitiva h, della stessa quantità $\frac{a^2\omega^2}{4g}$.

Dell' equilibrio dei fluidi pesanti.

10. Allorchè il peso è la sola forza che sollecita le molecole di un fluido omogeneo, si ha

$$dp = -\rho g\, dz, \quad \text{onde} \quad p = -\rho g z + c,$$

e se P dinota la pressione corrispondente a $z=h$, si avrà

$$p = \rho g (h - z) + P.$$

Le superficie di livello sono dei piani orizzontali, e la pressione in ciascun punto non dipende che dall' altezza.

Se la densità ρ fosse variabile in un modo continuo o discontinuo, bisognerebbe che essa fosse una funzione di z, e si avrebbe

$$p = -g\int \rho\, dz.$$

11. *Pressione sulle pareti.* Consideriamo da principio una parete piana, e dividiamola in elementi infinitamente piccoli $d\lambda$. Dinotiamo con z la distanza di uno qualunque tra essi dalla superficie esterna del liquido, che supporremo omogeneo. La pressione prodotta dal liquido sull' elemento $d\lambda$, indipendentemente dalla pressione esterna esercitata sulla superficie, sarà $g\rho z d\lambda$; e la somma di tutte le pressioni sarà

$$g\rho \Sigma z\, d\lambda, \quad \text{o} \quad g\rho A z_1,$$

A dinotando l' area della parete e z_1 la distanza del suo centro di gravità dalla superficie del liquido. Risulta da ciò che la pressione resterà la stessa qualunque posizione prenda la parete, purchè il suo centro di gravità resti fisso.

Questa pressione è del tutto indipendente dalla forma del vaso, e si può produrre sul fondo del vaso una pressione considerevole con un peso debolissimo di liquido, purchè la distanza dalla superficie libera sia grandissima.

In quanto al punto d' applicazione della risultante di tutte le pressioni, al quale si è dato il nome di *centro di pressione*, si calcolerebbe con la teoria ordinaria del centro delle forze parallele. È facile vedere che esso è situato più in basso del centro di gravità dell' area. Infatti, conduciamo per quest' ultimo un'orizzontale nel piano della parete; essa ne dividerà l' area in due parti di cui i momenti rispetto a quest' orizzontale saranno eguali. Ma le pressioni esercitate sulla parte della superficie situata al di sotto di questa linea darebbero, per rispetto ad essa

un momento maggiore che quelle che si esercitano sulla parte superiore; poichè, immaginando la superficie totale divisa in elementi eguali, le pressioni esercitate su ciascuno di quelli della parte inferiore saranno maggiori delle più grandi di quelle che hanno luogo nella parte superiore. Ora, se si prendessero tutte queste eguali alla più grande tra esse, che si riferisce ai punti situati sull'orizzontale condotta pel centro di gravità, e tutte le altre eguali alla più piccola tra esse, che si riferisce ai punti situati in questa stessa orizzontale, le somme dei momenti sarebbero eguali. Dunque, prendendole tali quali sono, la somma dei momenti è maggiore per quelle che si riferiscono alla parte inferiore; dunque il centro delle forze di pressione esercitate sulla parete è al di sotto dell'orizzontale condotta pel suo centro di gravità; ciò che bisognava dimostrare.

Per conoscere le coordinate di questo punto, bisogna calcolare, per rapporto ai tre piani coordinati, la somma dei momenti delle pressioni esercitate su ciascun elemento della parete, e dividerla per la somma delle pressioni.

Consideriamo da principio i momenti rispetto al piano delle x ed y.

Rappresentiamo con $d\lambda$ un elemento infinitamente piccolo della parete; la pressione che si esercita su di esso sarà $g\rho z d\lambda$, ed il suo momento avrà per valore $g\rho z^2 d\lambda$. Se dunque si dinotano con x', y', z' le coordinate del centro di pressione, con x_1, y_1, z_1 quelle del centro di gravità della parete, e con A la sua area, si avrà

$$\Sigma z^2\, d\lambda = z' \Sigma z\, d\lambda = A z' z_1\,,$$

i due integrali Σ estendendosi a tutti gli elementi della parete.

Si troverà similmente, prendendo i momenti rispetto ai due altri piani di proiezione,

$$\Sigma yz\, d\lambda = A y' z_1\,, \quad \Sigma xz\, d\lambda = A x' z_1.$$

Le coordinate del centro di pressione hanno dunque per valori

$$x' = \frac{\Sigma xz\, d\lambda}{A z_1}\,, \quad y' = \frac{\Sigma yz\, d\lambda}{A z_1}\,, \quad z' = \frac{\Sigma z^2\, d\lambda}{A z_1}.$$

12. Consideriamo, in particolare, il caso di un trapezio di cui le basi sono orizzontali. È facile di riconoscere che il centro di pressione è situato sulla linea che congiunge i punti medii delle due basi; di maniera che basta conoscere una delle tre coordinate di questo punto, per esempio z'. Per ciò, dividiamo il trapezio in strisce infinitamente piccole comprese tra rette parallele

alle basi, la somma $\Sigma z^2 d\lambda$ potrà ottenersi moltiplicando la superficie di ciascuna di queste strisce per il valore corrispondente di z^2, e facendo la somma di questi prodotti in tutta l'estensione del trapezio. Siano a la base superiore del trapezio, b la base inferiore, h la sua altezza, u la distanza di una striscia qualunque dalla base superiore, c la distanza di questa base dal livello del liquido, e γ l'angolo del piano del trapezio col piano orizzontale. L'area di una striscia qualunque avrà per espressione

$$\left(a + \frac{b-a}{h} u\right) du\,,$$

e si avrà $$z = c + u \operatorname{sen}\gamma.$$

Bisognerà dunque calcolare

$$\int (c + u \operatorname{sen}\gamma)^2 \left(a + \frac{b-a}{h} u\right) du,$$

e dividere il risultato per Az_1, o per

$$\frac{h(a+b)}{2} (c + u_1 \operatorname{sen}\gamma)\,;$$

si conoscerà così z', o $c + u' \operatorname{sen}\gamma$.

Il valore di u' determinerà la posizione del centro di pressione nel trapezio, più comodamente di z. Effettuando i calcoli indicati, si trova

$$u' = \frac{h^2(a+3b)\operatorname{sen}\gamma + 2hc(a+2b)}{2h(a+2b)\operatorname{sen}\gamma + 6c(a+b)}\,;$$

se si ha $c=0$, vale a dire se la base superiore è al livello del liquido, si ha

$$u' = \frac{h(a+3b)}{2(a+2b)}.$$

In questo caso il centro di pressione è indipendente dall'inclinazione della parete.

Se nello stesso tempo si ha

$$a = 0, \qquad \text{o} \qquad b = 0,$$

si trova, nel primo caso, $u' = \frac{3h}{4}$, e, nel secondo, $u' = \frac{h}{2}$.

Il trapezio è allora ridotto ad un triangolo: nel primo caso, il suo vertice è a fior d'acqua, e, nel secondo, è la base che vi si trova.

Se $a=b$, la parete ha la forma di un parallelogrammo, e si trova

$$u' = \frac{2h}{3}.$$

13. Le pressioni esercitate sopra una parete curva non sono sempre riducibili ad una sola forza, poichè esse non sono più parallele; ma, siccome esse sono applicate ad un sistema rigido, sono sempre riducibili a due forze al più. L'espressione di ciascuna delle pressioni elementari essendo conosciuta, del pari che le coordinate del suo punto di applicazione, si potranno sempre, con i metodi ordinarii, ridurle a tre forze dirette secondo gli assi delle coordinate, ed a tre coppie che hanno i loro assi in queste stesse direzioni. Si vedrà allora se la condizione necessaria affinchè vi sia una risultante è verificata, ed in questo caso, si determinerà facilmente la risultante. Nel caso contrario, il sistema delle forze si troverà ridotto ad una forza e ad una coppia, e si potrà, se si vuole, ridurlo a due forze solamente.

14. Consideriamo in particolare le pressioni esercitate sulla superficie di un corpo immerso, sia in totalità, sia in parte, in un liquido pesante in equilibrio. In questo caso, è facile di dimostrare che le componenti orizzontali delle pressioni si distruggono, e che non restano che le componenti verticali, le quali hanno sempre una risultante.

Infatti, consideriamo la porzione di superficie compresa tra due piani orizzontali infinitamente vicini, ed occupiamoci da principio delle componenti delle pressioni che essa sopporta parallelamente all'asse delle x. Potremo fare la decomposizione della superficie in un modo qualunque, ed in questo primo caso, la divideremo in elementi con piani paralleli al piano delle x e z, ed infinitamente vicini tra loro; essi si proietteranno a due a due secondo lo stesso rettangolo $dydz$ sul piano delle y e z. Ora, se si dinotano con p la pressione che corrisponde alla distanza dello strato dalla superficie libera del liquido, e con α, β, γ gli angoli che la normale in un punto qualunque dello strato fa con gli assi delle x, delle y e delle z, le componenti della pressione $p\omega$ che si esercita sopra un elemento ω di questo strato saranno

$$p\omega\cos\alpha,\quad p\omega\cos\beta,\quad p\omega\cos\gamma,$$

o

$$p\,dy\,dz,\quad p\,dx\,dz,\quad p\,dx\,dy,$$

vale a dire esse sono rispettivamente eguali alle pressioni che sopporterebbero nello stesso punto le proiezioni dell'elemento ω

sopra tre piani paralleli ai piani coordinati. Ma per i due elementi che hanno la stessa proiezione $dy\,dz$ sul piano delle y e z, le componenti parallele all'asse delle x, avendo così dei valori eguali $p\,dy\,dz$, ed in direzioni contrarie, si distruggeranno; e tutti gli elementi dello strato potendo essere considerati così a due a due, ne segue che tutte le componenti parallele all'asse delle x, delle pressioni che esso sopporta, si distruggono scambievolmente. Accadrebbe lo stesso delle componenti parallele all'asse delle y per le quali si farebbe la decomposizione in elementi che si proietterebbero a due a due secondo la stessa superficie $dxdz$; e risulta da ciò che non restano se non le componenti verticali delle pressioni sopportate dallo strato. Non resta più che a comporre queste ultime in tutta l'estensione della superficie immersa.

Ora, se si concepisce questa superficie decomposta in elementi che si proiettano sul piano delle x ed y secondo i rettangoli $dxdy$, questi elementi avranno a due a due la stessa proiezione, e daranno luogo a componenti in senso contrario, che si ridurranno ad una forza diretta da basso in alto, ed eguale al peso del liquido che rimpiazzerebbe la parte del corpo avente la stessa proiezione $dxdy$, questa porzione di liquido essendo supposta continuata ad altezza eguale, come il liquido che circonda il corpo, e che può essere omogeneo o eterogeneo.

Segue da ciò che il corpo è spinto in senso contrario del peso, come lo sarebbe, nel senso di questa forza, la parte del liquido di cui esso tiene il posto. Tutte le pressioni che esso sopporta hanno dunque una risultante eguale al peso del liquido spostato ed applicata al centro di gravità di questa porzione del liquido, in senso contrario del peso. Questo corpo è sollecitato, inoltre, dal suo peso applicato nel suo proprio centro di gravità; di maniera che esso non sarà in equilibrio se non quando il suo peso è eguale al peso del liquido che esso sposta, ed il centro di gravità di quest'ultimo è sulla verticale condotta pel centro di gravità del corpo.

Questo principio d'idrostatica, che è stato scoperto da Archimede, e che si applica egualmente ai liquidi ed ai gas, si enuncia ordinariamente dicendo che *un corpo immerso in un fluido qualunque in equilibrio, perde una quantità del suo peso eguale al peso del fluido che esso sposta.*

15. Nella dimostrazione che ne abbiamo data, abbiamo analizzato tutte le pressioni che hanno luogo sulla superficie del corpo immerso; ma si potrebbe dispensarsene e determinarne di-

rettamente l'effetto totale. In effetti, il corpo prova le stesse pressioni che proverebbe il liquido che esso sposta, e che si poteva supporre solidificato, senza turbare l'equilibrio. Ora, questa porzione di liquido non prendendo alcun movimento, bisogna che le pressioni che esso prova distruggano esattamente l'effetto del peso, e per conseguenza abbiano per risultante una forza verticale eguale al suo peso e che passa per il suo centro di gravità. Dunque ogni corpo immerso in un fluido si trova sottomesso all'azione di due forze verticali contrarie: l'una eguale al suo peso, ed applicata al suo centro di gravità; l'altra eguale al peso del liquido spostato, e che passa per il centro di gravità di questo liquido.

Risulta da ciò che, per conoscere il peso di un corpo, bisogna pesarlo nel vuoto. Se si sapesse quanto esso pesa nell'aria o in ogni altro fluido, bisognerebbe aggiungere a questo peso quello di un volume eguale di questo fluido, per avere il vero peso del corpo.

Sopra i principii precedenti è fondata la teoria degli areometri e della bilancia idrostatica.

CAPITOLO II.

Equilibrio dei galleggianti etc.

16. Affinchè un corpo solido, in parte immerso in un liquido, sia in equilibrio, è necessario, come abbiamo detto, che il suo peso sia eguale a quello del liquido spostato, e che il suo centro di gravità sia sulla stessa verticale con quello di questa porzione del liquido. Se supponiamo questo liquido omogeneo, al pari del corpo che *galleggia* alla sua superficie, il centro di gravità del liquido spostato coincide con quello della parte immersa del corpo solido. Così, per determinare le posizioni secondo le quali questo corpo può restare in equilibrio alla superficie del liquido, bisogna segarlo con un piano in modo che il volume di una delle parti stia al volume intero, come la densità del corpo sta a quella del liquido, e che i centri di gravità di questa parte e del corpo intero siano sopra una stessa perpendicolare al piano segante. Basta allora di situare il corpo in modo che questo piano coincida con la superficie del liquido, affinchè l'equilibrio abbia luogo.

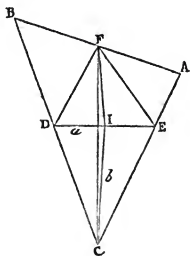
Per dare un esempio di questa determinazione, consideriamo un prisma triangolare retto, avente i suoi spigoli orizzontali. Nella sua posizione di equilibrio, esso potrà avere due di questi tre spigoli, o uno solo al di sotto del livello del liquido; esamineremo da principio quest'ultimo caso. È facile di vedere che la lunghezza del prisma non ha alcuna influenza sulla posizione cercata, e, di più, che ogni piano parallelo agli spigoli divide il volume nello stesso rapporto come la base. Possiamo dunque limitarci a considerare quest'ultima.

Siano ABC questa base, a, b, c i suoi tre lati, C il vertice immerso, DE la linea di galleggiamento o l'intersezione con la superficie del liquido, F ed I i punti medii di AB e DE, r il rapporto della densità del corpo a quella del liquido. Poniamo

$$CF = f, \quad CD = x, \quad CE = y,$$

e dinotiamo con α, β gli angoli ACF, BCF.

La quistione consiste a condurre la retta DE in modo che il rapporto dei triangoli CDE, CAB sia r, e che la linea FI, la quale è parallela a quella che congiungerà i centri di gravità di questi triangoli, sia per-

pendicolare a DE, condizione che si riduce a quella dell'eguaglianza delle linee DF, FE.

Le due equazioni che debbono determinare x ed y sono dunque

$$(1) \qquad xy = rab, \quad x^2 - 2fx\cos\alpha = y^2 - 2fy\cos\beta,$$

onde, eliminando y,

$$(2) \qquad x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2rabfx\cos\beta - r^2a^2b^2 = 0.$$

Questa equazione ha necessariamente due radici reali, l'una positiva, e l'altra negativa, che non si riferisce alla quistione. Se le due altre radici sono reali, la regola dei segni di Descartes mostra che esse sono positive; vi possono essere dunque al più tre posizioni di equilibrio, per le quali il vertice C sarebbe immerso; e ciò avrà luogo se i tre valori reali di x sono più piccoli di a, e danno per y dei valori più piccoli di b.

Se i due vertici A e B fossero immersi nel liquido, il rapporto delle superficie $BDEA$ ed ABC sarebbe r, e per conseguenza quello dei triangoli CDE, ABC sarebbe $1-r$; d'altronde, i centri di gravità di questi ultimi e di $BDEA$ essendo in linea retta, è chiaro che basta cambiare r in $1-r$ nelle equazioni (1), e l'equazione in x relativa al nuovo caso sarà

$$x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2(1-r)abfx\cos\beta - (1-r)^2a^2b^2 = 0.$$

17. Se il triangolo ABC è isoscele, si ha

$$b = a, \quad \cos\beta = \cos\alpha = \frac{f}{a}, \quad f^2 = a^2 - \frac{c^2}{4},$$

e le equazioni (1) diventano

$$xy = ra^2, \quad x^2 - y^2 - \frac{2f^2}{a}(x-y) = 0.$$

Si ha da principio per soluzione

$$x = y = a\sqrt{r},$$

e, togliendo il fattore $x-y$ nella seconda equazione, restano a trovare le soluzioni delle due seguenti:

$$xy = ra^2, \quad x + y = \frac{2f^2}{a}.$$

I valori di x ed y saranno dunque dati, come si poteva prevedere, da una stessa equazione di secondo grado, che sarà

$$(3) \qquad x^2 - \frac{2f^2}{a}x + ra^2 = 0, \quad \text{o} \quad x^2 - \frac{(4a^2-c^2)}{2a}x + ra^2 = 0;$$

le sue radici saranno immaginarie se si ha

$$r > \frac{f^4}{a^4}, \qquad \text{o} \qquad r > \left(1 - \frac{c^2}{4a^2}\right)^2;$$

esse saranno eguali se $r = \left(1 - \frac{c^2}{4a^2}\right)^2$, e si avrà ancora $x = y$, sicchè questa soluzione deve coincidere con la prima. Infatti, si trova $x = \frac{d^2}{a}$, e siccome si ha

$$f^4 = a^4 r,$$

ne risulta

$$f^2 = a^2 \sqrt{r}, \qquad \text{ed} \qquad x = a\sqrt{r},$$

come nel primo caso.

Se si ha $r < \left(1 - \frac{c^2}{4a^2}\right)^2$, le due radici sono reali e positive; esse danno dunque delle posizioni di equilibrio, se sono minori di a.

L'equazione relativa al caso in cui i due vertici A, B fossero immersi, si otterrà cambiando r in $1-r$ nella precedente, e sarà

$$x^2 - \frac{(4a^2 - c^2)}{2a} x + (1 - r) a^2 = 0, \tag{4}$$

e darebbe luogo ad una discussione analoga.

Se il triangolo è equilatero, si ha $c=a$, e le equazioni (3) e (4) diventano

$$x^2 - \frac{3a}{2} x + ra^2 = 0,$$

$$x^2 - \frac{3a}{2} x + (1 - r)a^2 = 0.$$

Le radici della prima sono

$$x = \frac{3a}{4} \pm \frac{a}{4} \sqrt{9 - 16r}.$$

Esse saranno reali se si ha $r < \frac{9}{16}$, e saranno tutte e due minori di a se si ha

$$\sqrt{9 - 16r} < 1, \qquad \text{o} \qquad r > \frac{1}{2}.$$

Vi saranno dunque tre posizioni di equilibrio per le quali il ver-

tice C sarà immerso, se r è compreso tra $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. L'equazione relativa ai due vertici immersi ha per radici

$$x=\frac{3a}{4}\pm\frac{a}{4}\sqrt{16r-7};$$

le sue radici saranno reali se si ha $r>\frac{7}{16}$, e saranno minori di a se si ha

$$\sqrt{16r-7}<1, \qquad \text{o} \qquad r<\frac{1}{2};$$

vi saranno dunque tre posizioni di equilibrio per le quali i due vertici A e B saranno immersi, se r è compreso tra $\frac{1}{2}-\frac{1}{16}$ ed $\frac{1}{2}$, condizione che non può essere soddisfatta nello stesso tempo con quella che si riferisce al caso precedente.

18. I prismi o cilindri omogenei possono essere anche in equilibrio, supponendo i loro spigoli verticali, ed accadrebbe lo stesso se, invece di essere omogenei, fossero composti di strati omogenei, di densità variabile, e perpendicolari agli spigoli. In questo caso, i centri di gravità del liquido spostato e del corpo solido essendo necessariamente sulla stessa verticale, basterebbe che il peso del primo fosse eguale a quello del secondo, perchè l'equilibrio avesse luogo. Se, in luogo di un cilindro, si avesse un solido di rivoluzione, le sue posizioni di equilibrio, supponendo il suo asse verticale, non offrirebbero maggiore difficoltà; basterebbe dividere il volume con un piano perpendicolare al suo asse, in modo che il rapporto di una delle due parti al tutto fosse eguale a quello della densità media del corpo a quella del liquido.

Stabilità dell' equilibrio dei galleggianti.

19. L'equilibrio di un corpo galleggiante è stabile o instabile, secondo che questo corpo tende a ritornare verso la sua prima posizione, o ad allontanarsene, allorchè ne è stato di poco spostato. Se questo corpo è un prisma avente i suoi spigoli orizzontali, è facile di vedere che in generale le sue posizioni di equilibrio stabile ed instabile si succedono alternativamente. Infatti, se lo si allontana di un modo continuo da una posizione di equilibrio stabile, per farlo pervenire ad un'altra posizione stabile, esso tenderà a ritornare alla prima sino ad un certo punto,

passato il quale tenderà ad allontanarsene per avvicinarsi alla seconda posizione. Esiste dunque una posizione intermedia tale che, quando si sposta il corpo da un lato o dall'altro, esso tende ad allontanarsene; e per conseguenza questa posizione è quella di un equilibrio instabile. Dunque, tra due posizioni di equilibrio stabile, ve ne è una di equilibrio instabile, e reciprocamente.

20. Prima di andare innanzi, è bene di osservare che se un corpo è segato da un piano, il volume situato da una parte di questo piano sarà equivalente a quello che si otterrebbe segandolo con un altro piano qualunque, che fa un angolo infinitamente piccolo col primo, purchè esso passi pel centro di gravità dell'area della prima sezione, vale a dire, per parlare più esattamente, la differenza dei due volumi sarà infinitamente piccola rispetto al volume compreso tra questi piani.

Infatti, trascurando le quantità infinitamente piccole per rapporto a questo volume, si può riguardare la superficie del corpo come rimpiazzata, nelle vicinanze della sezione, da una superficie cilindrica che le sarebbe perpendicolare. Ora, si sa che un tronco di cilindro ha per misura il prodotto di una delle sue basi per la perpendicolare abbassata dal centro di gravità della seconda sul piano della prima; d'onde risulta che tutte le sezioni condotte da questo punto, che sarà il loro centro di gravità, daranno dei tronchi di cilindri eguali in volume, e per conseguenza che i volumi compresi tra due sezioni qualunque, di cui l'uno si aggiunge e l'altro si toglie ad uno dei tronchi di cilindro per formare l'altro, sono equivalenti.

È evidente che la proposizione enunciata e la sua reciproca sono conseguenze di questo teorema.

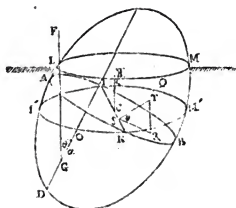
21. Ciò posto, consideriamo un corpo in equilibrio sopra un liquido omogeneo; i centri di gravità di questo corpo e del liquido spostato sono situati sopra una stessa verticale, ed i pesi di questo liquido e del corpo sono eguali. Spostiamolo ora infinitamente poco in un modo qualunque, imprimendo a tutti i suoi punti delle velocità infinitamente piccole; l'equilibrio sarà stabile, se questo spostamento resta sempre infinitamente piccolo, ed instabile nel caso contrario; la quistione consiste a distinguere questi due casi l'uno dall'altro, e questo è ciò che andiamo a fare per mezzo del principio delle forze vive.

Siano LQM la sezione della superficie del corpo col piano orizzontale che termina il liquido, o la linea di galleggiamento;

$ANBI$ la posizione che ha presa, dopo lo spostamento, la linea di galleggiamento relativa all'equilibrio;

$I'NM'I$ la sezione fatta nel corpo dal piano orizzontale condotto pel centro di gravità C dell'area $ANBI$ che dinoteremo con b;

G il centro di gravità;

O quello del liquido spostato dalla parte ADB del corpo;

V il volume di questo liquido il di cui peso è eguale a quello del corpo;

θ l'angolo di GO con la verticale;

ζ la distanza del punto C dal livello del liquido, che sarà preso per piano delle x ed y; $GO = a$;

ρ la densità del liquido, ed M la massa del corpo.

Le forze che sollecitano il corpo sono il peso e le pressioni esercitate dal liquido sulla parte immersa della sua superficie. La prima si riduce ad una forza verticale, agente dall'alto in basso ed eguale al peso del corpo, che è Mg, o $g\rho V$. Le altre producono lo stesso effetto come se tutti gli elementi della parte immersa del volume del corpo fossero sollecitati da forze verticali, dirette da basso in alto ed eguali ai pesi di questi elementi, considerati come formati dal liquido stesso.

Le componenti X, Y sono dunque nulle per tutti i punti; e se si prende l'asse delle z nel senso del peso, si avrà $Z=g$ per tutti gli elementi del corpo, e $Z=-g$ per gli elementi della parte immersa, considerata come formata dal liquido. Considerando così Z, il principio delle forze vive darà l'equazione

$$\Sigma v^2 dm = 2\Sigma dm \int Z\, dz + C. \tag{1}$$

Le velocità essendo supposte piccolissime, il primo membro è una quantità piccolissima del secondo ordine, e nel calcolo del secondo membro, non si avrà il dritto di trascurare che i termini i quali non influirebbero sui risultati, che di quantità di un ordine superiore al secondo.

Consideriamo da principio i termini del secondo membro che provengono dal peso degli elementi del corpo. Si avrà allora

$$\int Z\,dz = gz\,, \quad \text{e} \quad 2\Sigma\,dm\int Z\,dz = 2g\,\Sigma\,z\,dm = 2g\,Mz_1\,,$$

z_1 essendo la z del centro di gravità del corpo.

In quanto alla parte immersa, la considereremo da principio come composta della parte compresa tra le sezioni orizzontali LQM, $L'NM'$, e del volume situato al di sotto dell'ultima. Quest'ultimo volume è esso stesso eguale al volume ADB, o V, aumentato del volume $INBM'$ e diminuito di $INL'A$.

Il valore di Z essendo attualmente $-g$, si ha

$$\int Z\,dz = -\,gz.$$

Se $d\omega$ dinota l'elemento di volume, si avrà

$$dm = \rho\,d\omega,$$

e

$$2\,\Sigma\,dm\int Z\,dz = -\,2\,g\rho\int z\,d\omega.$$

Non si tratta dunque più che di calcolare $\int z\,d\omega$ per i quattro volumi che abbiamo indicati.

Lo spostamento essendo supposto infinitamente piccolo, le diverse sezioni che abbiamo considerate nel corpo possono tutte essere considerate come equivalenti a b, e la porzione compresa tra le due che sono parallele può essere riguardata come cilindrica. Così, per questa prima parte, si avrà

$$\int z\,d\omega = \frac{1}{2}\,b\zeta^2.$$

Per il volume ADB, si avrà

$$\int z\,d\omega = V(z_1 - a\cos\theta)\,,$$

o, rimpiazzando $\cos\theta$ con $1 - \dfrac{\theta^2}{2}$,

$$\int z\,d\omega = Vz_1 - Va + \frac{Va\,\theta^2}{2},$$

se il punto O è al di sopra di G; nel caso contrario, bisognerebbe cambiare il segno di a. Il volume $INBM'$ può decomporsi in elementi prismatici, avendo i loro spigoli verticali, e per basi gli elementi dell'area $ANPI$.

Siano $d\lambda$ uno di questi ultimi, situato in R; $RS=u$ la perpendicolare abbassata sopra IN, ed RT l'altezza del prisma. Il suo volume sarà $RTd\lambda\cos\theta$, espressione che si può rimpiazzare con $u\theta\, d\lambda$; moltiplicandola per la z del mezzo di RT che è $\zeta+\frac{1}{2}u\tan\theta$, o semplicemente $\zeta+\frac{1}{2}u\theta$, si avrà il valore di $\int z d\omega$ relativamente a questo elemento; si troverà così

$$u\theta\, d\lambda \left(\zeta + \frac{1}{2}u\theta\right),$$

espressione che si dovrà integrare in tutta l'estensione dell'area INB.

Ma si troverebbe un'espressione simile per gli elementi del volume $INLA$, ad eccezione della z del mezzo del prisma, che sarebbe eguale a $\zeta-\frac{1}{2}u\theta$; e siccome i termini provenienti da questo volume debbono essere cambiati di segno, essi sarebbero espressi da

$$-u\theta\, d\lambda \left(\zeta - \frac{1}{2}u\theta\right).$$

Si vede da ciò che basterà fare la somma dei termini della forma

$$u\theta\, d\lambda \left(\zeta + \frac{1}{2}u\theta\right),$$

in tutta l'estensione dell'area $ANBI$, riguardando u come positivo nella parte INB, e come negativo nell'altra. Ma $\int u d\lambda$ è nullo, poichè IN contiene il centro di gravità dell'area $ANBI$; resta dunque $\frac{\theta^2}{2}\int u^2 d\lambda$. Dinotiamo con bh^2 l'integrale $\int u^2 d\lambda$, che si può chiamare il momento d'inerzia dell'area $ANBI$ rispetto ad NI; l'espressione precedente diverrà $\frac{bh^2\theta^2}{2}$.

Riunendo le diverse parti di $\int z\, d\omega$, viene

$$\int z\, d\omega = \frac{1}{2}b\zeta^2 + \frac{1}{2}bk^2\theta^2 + Vz_1 - Va + \frac{Va\theta^2}{2},$$

e l'equazione (1) diviene, osservando che $M=V\rho$ ed includendo il termine $2g\rho Va$ nella costante,

$$\Sigma v^2 dm = -g\rho b\zeta^2 - g\rho(bh^2 + aV)\theta^2 + c; \tag{2}$$

se il punto O fosse al di sotto di G, bisognerebbe, come abbiamo fatto osservare, cambiare a in $-a$.

La costante c si determinerà dallo stato iniziale, e se le velocità iniziali sono nulle, o infinitamente piccole, c sarà essa stessa infinitamente piccola.

Ciò posto, il primo membro dell'equazione (2) essendo essenzialmente positivo, sarà lo stesso del secondo, e per conseguenza i termini negativi debbono costantemente dare una somma infinitamente piccola, poichè essa deve essere minore di c; ciò che esige che θ e ζ restino infinitamente piccoli. Da ciò si conclude che, *quando il centro di gravità del corpo è al di sotto del centro di gravità del liquido spostato nello stato di equilibrio, lo spostamento resterà sempre infinitamente piccolo, e per conseguenza l'equilibrio è stabile.* Ma se il centro di gravità del corpo è al di sopra del liquido spostato, l'equazione (2) si cambia nella seguente

$$\Sigma v^2 dm = -g\rho b\zeta^2 - g\rho(bh^2 - aV)\theta^2 + c.$$

Ora, quantunque c sia infinitamente piccola, θ e ζ potrebbero cessare di esserlo se tutt'i termini che contengono i loro quadrati non fossero negativi. È dunque necessario per la stabilità dell'equilibrio, che si abbia

$$bh^2 - aV > 0, \quad \text{o} \quad a < \frac{bh^2}{V};$$

e siccome bh^2 cambia insieme con la direzione di IN, bisogna che l'ineguaglianza precedente abbia luogo, prendendo il più piccolo valore di cui bh^2 sia suscettibile, quando si suppone che IN prenda tutte le direzioni intorno al centro di gravità c dell'area $ANBI$. *L'equilibrio può dunque ancora essere stabile allorchè il centro di gravità del corpo è al di sopra di quello del fluido spostato; basta che la distanza di questi due punti sia minore del più piccolo dei momenti d'inerzia dell'aréa della sezione a fior d'acqua rispetto alle rette condotte pel suo centro di gravità, diviso per il volume immerso.*

Equilibrio di un miscuglio di gas pesanti.

22. Consideriamo un cilindro verticale indefinito che racchiude più gas pesanti, e chiuso alla sua base situata alla superficie della terra, alla distanza r dal suo centro. Supponiamo la temperatura costante in tutta l'estensione del cilindro, ed il peso variabile in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro della terra.

L'esperienza ha mostrato che, quando più gas sono situati in uno stesso recipiente e sono senza azione chimica gli uni su gli altri, essi non si sovrappongono, per ordine di densità, come i liquidi; ma ciascuno di essi si dispone come se fosse assolutamente solo nel recipiente, e la pressione e la densità in ciascun punto del miscuglio sono le somme di quelle che si osserverebbero nell'equilibrio di ciascuno di questi gas, considerato isolatamente.

Siano p' e ρ' la pressione e la densità di uno dei gas, per un valore qualunque di z; p_0', ρ_0' i loro valori per $z=0$; g il peso alla superficie della terra. Si avrà $p'=k'\rho'$, k' essendo costante, poichè la temperatura è la stessa in tutti i punti; ed

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-\frac{gr^2}{(r+z)^2},$$

e, per conseguenza,

$$dp'=-\rho' gr^2 \frac{dz}{(r+z)^2},$$

onde, rimpiazzando ρ' con $\frac{p'}{k'}$,

$$\frac{dp'}{p'}=-\frac{gr^2}{k'}\,\frac{dz}{(r+z)^2},$$

ed integrando a partire da $z=0$, e riducendo,

$$\log\frac{p'}{p_0'}=-\frac{gr}{k'}\cdot\frac{z}{r+z},$$

o

$$p'=p_0'\,e^{-\frac{gr}{k'}\cdot\frac{z}{r+z}},$$

e, per conseguenza,

$$\rho'=\rho_0'\,e^{-\frac{gr}{k'}\cdot\frac{z}{r+z}}$$

Si troverebbe similmente per un altro gas

$$p''=p_0''\,e^{-\frac{gr}{k''}\cdot\frac{z}{r+z}}$$

$$\rho''=\rho_0''\,e^{-\frac{gr}{k''}\cdot\frac{z}{r+z}},$$

e così degli altri. Se dunque si dinotano con p e ρ la pressione e la densità che si osserverebbero ad un'altezza qualunque nel

miscuglio di questi diversi gas, si avrà

$$p = p_0' \, e^{-\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z}} + p_0'' \, e^{-\frac{gr}{k''} \cdot \frac{z}{r+z}} + \ldots\ldots ,$$

$$\rho = \rho_0' \, e^{-\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z}} + \rho_0'' \, e^{-\frac{gr}{k''} \cdot \frac{z}{r+z}} + \ldots\ldots$$

È bene osservare che i differenti gas non saranno mescolati esattamente nelle stesse proporzioni a differenti altezze; poichè le quantità ρ', ρ'',... non sono rispettivamente negli stessi rapporti di ρ_0', ρ_0'',..., a meno che i coefficienti k', k'',... non siano eguali, ciò che non ha luogo in generale. Ma questi coefficienti essendo generalmente dei numeri grandissimi, il cambiamento di proporzione dei gas non si farebbe sentire che ad altezze considerevoli.

Misura delle altezze con le osservazioni barometriche.

23. Supponiamo l'atmosfera in equilibrio ed immaginiamo che essa sia interamente solidificata, ad eccezione di un cilindro verticale che parte dalla superficie della terra e si estende indefinitamente al di sopra; la costituzione dell'aria nel suo interno resterà la stessa di prima, e basterà di determinarla per conoscere quella che avea da principio l'atmosfera. Ora, se possiamo calcolare la pressione del gas in questo cilindro in funzione dell'altezza, la conoscenza di questa pressione in un punto qualunque condurrà a quella dell'altezza di questo punto; e d'altronde la pressione potrà essere determinata per mezzo del barometro, tenendo conto di alcune circostanze accessorie. Occupiamoci dunque di cercare la formola che lega l'altezza alla pressione in questo cilindro atmosferico in equilibrio.

Supponiamo che il peso varii in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro della terra, e non teniamo conto del cambiamento insensibile che opererebbe in questa legge il cambiamento della forza centrifuga nell'estensione verticale in cui sono racchiusi i punti che paragoniamo. Siano g l'intensità del peso alla superficie della terra nel luogo che si considera, r la distanza di questo punto della superficie dal centro della terra, e g' il suo valore alla distanza $r+z$, si avrà

$$g' = \frac{gr^2}{(r+z)^2}.$$

Siano θ la temperatura di un gas, α il coefficiente di dilatazione dei gas per una elevazione di temperatura di 1 grado centigra-

do, e k un coefficiente costante per uno stesso gas, si avrà l'equazione seguente

$$p = k\rho(1 + \alpha\theta).$$

Questa stessa formola è evidentemente applicabile ad un miscuglio di più gas o vapori in proporzioni invariabili, il coefficiente k avendo un certo valore medio tra quelli che si riferirebbero a ciascuno di essi. È quello che adotteremo per l'aria, poichè l'esperienza ha dimostrato che la proporzione dei gas che la compongono è la stessa alla superficie della terra ed alle più grandi altezze alle quali si sia mai giunto nella verticale. In quanto al vapore che vi si trova mescolato, e che è in quantità molto debole ad altezze alquanto considerevoli, bisognerà anche ammettere che esso entri in una proporzione costante, che sarà una media tra quelle che si osserverebbero ai due punti estremi di cui si cerca la differenza di altezza.

Il coefficiente α è presso a poco lo stesso per tutti i gas del pari che per i vapori ed eguale a 0,00366. Ma, siccome la quantità di vapore contenuto nell'aria aumenta con la temperatura, ed il vapore ha una densità minore dell'aria, sotto una stessa pressione, ne segue che, quando la temperatura si eleva, la densità dell'aria deve diminuire un poco più rapidamente che non l'indicherebbe la formola precedente. Si avrà riguardo a questa circostanza aumentando il coefficiente α, ed il valore che gli si dà ordinariamente a questo effetto è 0,004.

Ciò posto, bisognerà fare, nell'equazione generale dell'equilibrio dei fluidi,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g',$$

e si avrà

$$dp = -\frac{\rho g r^2 dz}{(r+z)^2},$$

o, rimpiazzando ρ col suo valore in funzione di p,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)} \cdot \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

La temperatura θ varia secondo una legge incognita con l'altezza, e ci allontaneremo poco dall'esattezza supponendole un valore costante, eguale alla media delle temperature dei due punti estremi che si considerano. Dopo ciò, l'equazione precedente dà, con l'integrazione dei suoi due membri,

$$\log p = \frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z)} + C,$$

C dinotando una costante arbitraria che si determinerà per

mezzo dei dati relativi alla prima delle due stazioni di cui si domanda la differenza di altezza.

Siano z_0 e p_0 i valori di z e di p alla prima stazione. Si avrà

$$\log \cdot p_0 = \frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z_0)} + C;$$

e, sottraendo le due equazioni l'una dall'altra,

$$\log \frac{p_0}{p} = \frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z_0)} \cdot \frac{z-z_0}{r+z}.$$

Se si dinotano con Z le altezze verticali al di sopra della prima stazione, vale a dire se si pone $z-z_0=Z$, e si fa $r+z_0=R$, l'equazione precedente diviene

$$(1) \qquad \log \frac{p_0}{p} = \frac{gr^2}{kR(1+\alpha\theta)} \cdot \frac{Z}{R+Z}.$$

Siano t_0, t le temperature dell'aria alle due stazioni, il valore di θ sarà $\frac{t_0+t}{2}$; ma, per non complicare l'equazione, continueremo a dinotarlo con θ. In quanto al rapporto $\frac{p_0}{p}$, esso può esprimersi per mezzo delle altezze barometriche corrispondenti alle pressioni p, p_0, purchè vi si riduca il mercurio ad una stessa temperatura, e che, di più, si abbia riguardo alla variazione del peso passando da una stazione all'altra.

Infatti, dinotando con D la densità del mercurio a 0 gradi, con h_0, h le altezze barometriche corrispondenti alle due stazioni e ridotte alla stessa temperatura, per esempio a 0 grado, e con g_0, g' i valori del peso in queste due stazioni, si avrà

$$p_0 = g_0 D h_0, \quad p = g' D h, \quad \frac{g_0}{g'} = \frac{(R+Z)^2}{R^2} = \left(1+\frac{Z}{R}\right)^2;$$

da cui si conclude

$$\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h}\left(1+\frac{Z}{R}\right)^2.$$

Sostituendo nell'equazione (1) e rimpiazzando i logaritmi neperiani con i logaritmi ordinarii, divisi per il modulo M il di cui valore è 0,4342945, si ottiene

$$(2) \qquad Z = \frac{k(1+\alpha\theta)R^2}{Mgr^2}\left[\log\frac{h_0}{h} + 2\log\left(1+\frac{Z}{R}\right)\right]\left(1+\frac{Z}{R}\right).$$

24. La correzione che bisogna fare alle indicazioni del barometro è facilissima. Siano T_0, T le temperature del mercurio alle due stazioni, le quali sono indicate dai termometri adattati al barometro; ed H_0, H le altezze indicate dal barometro.

Il mercurio dilatandosi di $\frac{1}{5550}$ del suo volume a 0 grado, per ogni grado del termometro centigrado, i valori che prende la sua densità alle temperature 0 e T_0 sono tra loro nel rapporto di $1+\frac{T_0}{5550}$ all'unità. Ora, la pressione dell'aria è misurata dal peso di una colonna di mercurio che ha l'unità per base, e per altezza quella che indica il barometro verticale; di maniera che, per una stessa pressione, quest'altezza sarà in ragione inversa della densità del mercurio. Dunque tra H_0 ed h_0 si avrà la relazione

$$H_0 = h_0\left(1+\frac{T_0}{5550}\right);$$

si avrà similmente

$$H = h\left(1+\frac{T}{5550}\right),$$

da cui si ricava

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H}\cdot\frac{1+\frac{T}{5550}}{1+\frac{T_0}{5550}},$$

o, trascurando le potenze di $\frac{T_0-T}{5550}$, superiori alla prima,

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H\left(1+\frac{T_0-T}{5550}\right)}.$$

Si vede dunque che basterà prendere $h_0 = H_0$ e rimpiazzare H con

$$H\left(1+\frac{T_0-T}{5550}\right).$$

Lasceremo, per maggiore semplicità, nella formola (2), le quantità h_0 ed h che sono ora determinate dalle osservazioni fatte alle due stazioni.

Vi è ancora un'altra correzione da fare alla formola (2), e che è relativa alla latitudine del luogo dell'osservazione.

Abbiamo dinotato con g il peso considerato a Parigi, ed il suo valore è

$$g = 9,80896.$$

La formola (2) non si riferirebbe dunque che alle osservazioni fatte a Parigi. Affinchè essa sia applicabile in tutt'i luoghi, bisogna sostituirvi per g l'espressione seguente

$$g \cdot \frac{1 - 0,002588 \cos 2\psi}{1 - 0,002588 \cos 2\psi_1},$$

ψ dinotando la latitudine del luogo dell'osservazione, e ψ_1 quella di Parigi.

Facendo questa sostituzione nell'equazione (2), il secondo membro avrà un coefficiente puramente numerico, che si può calcolare direttamente o dedurre dall'equazione stessa, nella quale si sostituirebbe a Z il valore risultante da misure trigonometriche. Questi due procedimenti danno sensibilmente lo stesso risultato; se di più si suppone che la prima stazione abbia luogo sensibilmente a livello del mare, nel quale caso si ha

$$z_0 = 0, \quad R = r, \quad Z = z,$$

la formola (2) diverrà

$$(3) \qquad z = \frac{18336^m (1 + \alpha\theta)}{1 - 0,002588 \cos 2\psi} \left[\text{Log} \frac{h_0}{h} + 2 \,\text{Log} \left(1 + \frac{z}{r}\right) \right] \left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

25. Per calcolare il valore di z, s'incomincerà col sostituire a θ e ψ i valori dati dalle osservazioni; e se, per abbreviare, si fa

$$\frac{18336 (1 + \alpha\theta)}{1 - 0,002588 \cos 2\psi} = A,$$

si avrà $$z = A \left[\text{Log} \frac{h_0}{h} + 2 \,\text{Log} \left(1 + \frac{z}{r}\right) \right] \left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

Trascurando da principio $\frac{z}{r}$ rispetto ad 1, si avrà un primo valore approssimato, che dinoteremo con z_1, e che sarà

$$z_1 = A \,\text{Log} \frac{h_0}{h};$$

per avere un secondo valore più approssimato z_2, si sostituirà z_1 a z nel secondo membro, e si avrà

$$z_2 = A \left[\text{Log} \frac{h_0}{h} + 2 \,\text{Log} \left(1 + \frac{z_1}{r}\right) \right] \left(1 + \frac{z_1}{r}\right).$$

Si sostituirà in seguito questo nuovo valore a z, nel secondo membro della stessa equazione, e si avrà ancora un altro valore più approssimato per z. Si potrebbero continuare indefinitamente queste approssimazioni successive; ma ordinariamente potremo fermarci a z_2.

Allorchè $\frac{z}{r}$ è piccolissimo, si può trascurarlo interamente nella formola (3); ma allora è necessario aumentare un poco il coefficiente 18336. M. Ramond ha conchiuso da un gran numero di osservazioni fatte nel mezzodì della Francia che bisognava rimpiazzarlo con 18393; siccome nello stesso tempo $\cos 2\psi$ era sensibilmente nullo, egli impiegava la formola semplicissima

$$z = 18393\,(1 + \alpha\theta)\,\text{Log}\,\frac{h_0}{h}.$$

FINE DELL' IDROSTATICA.

IDRODINAMICA.

IDRODINAMICA.

CAPITOLO I.

Movimento dei Fluidi.

1. L'Idrodinamica ha per oggetto il movimento dei fluidi.

Per farsi un'idea esatta del problema considerato nel modo più generale, bisogna supporre che ad un istante determinato, che si prenderà per esempio per origine del tempo, si conosca la posizione di tutte le molecole che compongono il fluido e le velocità da cui esse sono animate; che di più si diano le forze esterne che agiscono su tutt'i punti del fluido, le pressioni e le altre condizioni relative ai suoi limiti in tutt'i sensi. Ciò posto, si tratta di determinare il movimento di ciascuna molecola in particolare, vale a dire di trovare l'espressione delle sue tre coordinate in funzione del tempo, e di conoscere di più la pressione e la densità in un punto qualunque e ad un istante qualunque.

Le coordinate x, y, z di una molecola determinata sono funzioni della sola variabile t. Ma queste funzioni cambiano da una molecola all'altra e dipendono, per conseguenza, dalle coordinate a, b, c del punto in cui si trovava la molecola che si considera, all'origine del movimento. Si debbono dunque riguardare x, y, z come funzioni delle quattro variabili indipendenti a,b,c,t; e se si può trovare l'espressione generale di queste tre funzioni, si conoscerà esattamente il movimento di quella molecola che si vuole, a partire dalla sua posizione iniziale.

2. Se il problema fosse risoluto, e si conoscessero queste tre funzioni di a, b, c, t, se ne potrebbero dedurre a, b, c in funzione di x, y, z, t, e per conseguenza ogni funzione delle variabili indipendenti a, b, c, t può essere considerata come funzione delle quattro variabili indipendenti x, y, z, t. Così, per esempio, le componenti della velocità di un punto del fluido, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, che rappresenteremo rispettivamente con u, v, w, essendo di-

pendenti da a, b, c, t, potranno essere riguardate come dipendenti da x, y, z, t; ciò che d'altronde si concepisce a priori; poichè, se si considera un punto qualunque del fluido, di cui le coordinate x, y, z restano costanti, le quantità u, v, w relative a questo punto cambieranno col tempo, e sono per conseguenza funzioni di t. Similmente, se si lasciano y, z e t costanti e si faccia variare x, vale a dire se allo stesso istante si considerano i diversi punti di una parallela all'asse delle x, u, v, w varieranno ancora; esse sono dunque funzioni della variabile indipendente x, e così delle altre; risulta da ciò che u, v, w sono funzioni delle quattro variabili indipendenti x, y, z, t. Si direbbe altrettanto di ogni funzione di a, b, c, t.

3. È facile vedere che il problema proposto sarebbe risoluto se si potessero determinare u, v, w in funzione di x, y, z, t; poichè, per conoscere il movimento di una molecola in particolare basterebbe considerare x, y, z come funzioni di t solamente, e di porre

$$\frac{dx}{dt} = u, \ \frac{dy}{dt} = v, \ \frac{dz}{dt} = w;$$

si avrebbero così tre equazioni differenziali tra x, y, z, t, dopo che si saranno rimpiazzate u, v, w con i loro valori; integrandole, si conoscerebbero x, y, z in funzione di t, e si determinerebbero le tre costanti che questa integrazione introdurrebbe esprimendo che, per $t=0$, x, y, z prendono i valori delle coordinate iniziali della molecola che si considera.

4. *Equazioni del movimento dei fluidi.* Siano Xdm, Ydm, Zdm, le componenti della forza applicata alla molecola di cui la massa è dm; u, v, w le componenti della sua velocità, ed u', v', w' le derivate per rapporto a t, delle quantità rispettive u, v, w considerate come relative al movimento di una molecola determinata, e per conseguenza come funzioni della sola variabile t. Non possiamo rappresentare queste derivate con $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ perchè si confonderebbero con le derivate parziali di u, v, w rispetto a t. Siano finalmente p la pressione e ρ la densità, che possono variare con x, y, z, t. Si formeranno da principio tre equazioni del movimento del fluido per mezzo del principio di d'Alembert, osservando che il fluido sarebbe in equilibrio se una molecola qualunque dm fosse sollecitata dalla forza che ha per componenti

$$(X - u')\,dm, \quad (Y - v')\,dm, \quad (Z - w')\,dm,$$

da cui risultano le tre equazioni

$$\frac{dp}{dx} = \rho(X - u'), \quad \frac{dp}{dy} = \rho(Y - v'), \quad \frac{dp}{dz} = \rho(Z - w').$$

Per ottenere le espressioni di u', v', w', bisogna osservare che u, v, w debbono essere differenziate riguardando x, y, z come funzioni di t che si riferiscono al movimento della molecola dm, e che, per conseguenza, gli accrescimenti di x, y, z, corrispondenti all'accrescimento dt del tempo, hanno per valori

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt.$$

Si avrà perciò

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$
$$v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$
$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz},$$

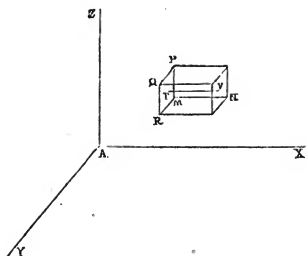
e le tre equazioni precedenti diventano

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx} = X - \dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dy} = Y - \dfrac{dv}{dt} - u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{dv}{dy} - w\dfrac{dv}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dz} = Z - \dfrac{dw}{dt} - u\dfrac{dw}{dx} - v\dfrac{dw}{dy} - w\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Queste tre equazioni non bastano per la determinazione delle cinque funzioni p, ρ, u, v, w. Sono necessarie due equazioni di più, a meno che ρ non sia costante, ed, in questo caso, resterebbe solamente una a trovarne. Andiamo a vedere come si possono trovare queste equazioni per la condizione che il fluido resti continuo.

5. Immaginiamo che lo spazio occupato dal fluido sia diviso in parallelepipedi infinitamente piccoli dx, dy, dz. Dopo il tempo dt, essi debbono trovarsi ancora riempiti dal fluido, eccetto forse quelli che si troverebbero alla superficie libera, e per conseguenza l'accrescimento della densità in ciascuno di essi sarà eguale all'accrescimento della massa che vi era racchiusa, divisa pel volume. Per esprimere questa condizione, bisogna cercare l'eccesso della massa del fluido che è entrata in uno qualunque di essi, sulla massa che ne è uscita durante il tempo dt.

Siano x, y, z le coordinate del vertice M di questo parallele-

pipedo; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ quelle del vertice opposto S; u, v, w le componenti della velocità del punto situato in M dopo il tempo t, e ρ la densità in questo punto allo stesso istante.

La direzione della velocità variando in un modo continuo, se entra del fluido da una faccia, ne uscirà dalla faccia opposta, e se si calcola l'eccesso della massa della prima quantità sulla seconda per le tre coppie di facce parallele, la loro somma sarà l'accrescimento della massa racchiusa nel parallelepipedo.

Consideriamo da principio la faccia $MPQR$ e la sua parallela. Se ρ ed u fossero costanti nell'estensione di ciascuna di esse, la massa introdotta per la prima sarebbe

$$\rho u \, dy \, dz \, dt,$$

la massa uscita per la seconda sarebbe

$$\left[\rho u + \frac{d(\rho u)}{dx} dx\right] dy \, dz \, dt,$$

e l'eccesso avrebbe per espressione

$$-\frac{d(\rho u)}{dx} dx \, dy \, dz \, dt.$$

Ora, si può ammettere che sia così; poichè, se si considerano due punti T, V presi rispettivamente nelle due facce e situati sopra una parallela all'asse delle x, la differenza dei valori di ρu in questi due punti non sorpassa la differenza dei valori di ρu nei punti M ed N, che di una quantità infinitamente piccola rispetto a essa stessa, poichè basterebbe rimpiazzare in quest'ultima le coordinate di M con quelle di T per ottenere l'espressione della prima.

Similmente, l'eccesso della quantità di massa entrata per le due facce $dxdz$, $dxdy$ su quella che è uscita per le facce parallele, è espressa rispettivamente da

$$-\frac{d(\rho v)}{dy}\,dx\,dy\,dz\,dt, \qquad -\frac{d(\rho w)}{dz}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Dividendo la somma dei tre eccessi pel valore $dxdydz$, si conoscerà l'accrescimento della densità del liquido contenuto nel parallelepipedo, o della densità nel punto di cui le coordinate sono x, y, z. Questo sarà dunque il coefficiente differenziale parziale della densità rispetto al tempo, e si avrà per conseguenza l'equazione

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\cdot\rho u}{dx} + \frac{d\cdot\rho v}{dy} + \frac{d\cdot\rho w}{dz} = 0.$$

Esaminiamo ora in qual modo essa debba essere interpetrata nei differenti casi che possono presentare i fluidi.

6. Se si tratta di un liquido, vale a dire di un fluido incompressibile, e che la sua densità sia la stessa in tutt'i punti, ed indipendente dal tempo, l'equazione (2) si riduce a

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

In questo caso, non vi sono che quattro funzioni incognite p, u, v, w, poichè ρ è dato. Le equazioni (1) e (3) bastano dunque per la loro determinazione.

7. Se si considera ora un liquido eterogeneo, la densità di ciascuna molecola è invariabile; ma ρ è ancora una funzione di x, y, z, t. Per esprimere che questa funzione resta costante per una stessa molecola, bisogna cercare il suo differenziale totale esprimendo che dx, dy, dz hanno i valori corrispondenti al movimento di questa molecola, ed eguagliarlo a zero. Si ottiene così

$$(4) \qquad \frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} = 0,$$

ciò che riduce l'equazione (2) a

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

In questo caso, vi sono cinque funzioni da determinare, vale a dire, p, ρ, u, v, w, ed uno stesso numero di equazioni (1), (4), (5).

8. Se si tratta di un fluido compressibile di cui la temperatura è costante, si ha tra p e ρ la relazione

$$p = k\rho,$$

che, unita alle equazioni (1) e (2) determina le cinque funzioni ignote.

9. *Condizioni relative alla superficie.* Le equazioni che abbiamo ottenuto sinora si applicano a tutt'i punti nell'interno del fluido; e se esso è indefinito, non resta ad aggiungervi che le condizioni relative allo stato iniziale. Ma se il fluido è terminato, esistono delle equazioni particolari per i punti che si trovano alla sua superficie. Si suppone ordinariamente che i punti che erano da principio in contatto con una parete mobile o immobile vi restino indefinitamente, e che i punti che appartenevano primitivamente alla superficie libera non cessino mai di farne parte. Queste ipotesi restringono molto la quistione, e, malgrado ciò, vi sono ancora ben pochi casi in cui i calcoli si possano effettuare completamente.

Sia $F(x,y,z,t)=0$ l'equazione di una superficie sulla quale un punto del fluido deve costantemente trovarsi. Supponiamo che, per un certo valore di t, le sue coordinate vi soddisfacciano, e che t cresca di dt; queste coordinate cresceranno di

$$udt, \quad vdt, \quad wdt,$$

e questi accrescimenti dovranno soddisfare all'equazione differenziale della superficie, quando si sostituiscono a dx, dy, dz, ciò che dà la condizione

$$\frac{dF}{dt} + u\frac{dF}{dx} + v\frac{dF}{dy} + w\frac{dF}{dz} = 0.$$

Se la parete è fissa, il termine $\frac{dF}{dt}$ sparisce.

Questa equazione dovrà aver luogo per tutta la durata del movimento per i punti che si trovavano primitivamente in contatto con la parete di cui si tratta; e ve ne saranno delle simili per tutte le parti della superficie che non sono libere.

10. I punti della superficie libera sono sottomessi all'azione di una pressione conosciuta, che è ordinariamente la stessa in tutti questi punti, ma che può variare col tempo. Dinotandola con P, l'equazione di questa superficie sarà

$$p - P = 0,$$

da cui si conclude la condizione seguente per i punti che vi si trovano:

$$\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = \frac{dP}{dt}.$$

Queste diverse equazioni relative ai limiti del fluido concorrono con lo stato iniziale alla determinazione delle funzioni arbitrarie introdotte dall'integrazione delle equazioni differenziali parziali.

11. Allorchè u, v, w sono le derivate parziali per rapporto ad x, y, z di una funzione φ di x, y, z, t, si possono ridurre le equazioni (1) ad una sola, e la soluzione della questione è ridotta alla determinazione di φ, poichè se ne dedurranno u, v, w con le differenziazioni.

Non considerando che le variabili x, y, z in φ, si avrà, per l'ipotesi,

$$udx + vdy + wdz = d\varphi.$$

Supponiamo, di più, che X, Y, Z siano le derivate parziali di una funzione V, di maniera che si abbia

$$Xdx + Ydy + Zdz = dV.$$

Ciò posto, le equazioni (1) possono scriversi così:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{dV}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \frac{dV}{dy} - \frac{d^2\varphi}{dy\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \frac{dV}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dz\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

Se si moltiplicano rispettivamente queste equazioni per dx, dy, dz, e si sommano, si ottiene

$$(6)\qquad \frac{dp}{\rho} = dV - d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

tutt'i differenziali essendo presi rispetto ad x, y, z, considerando t come costante.

I due membri di questa equazione potranno integrarsi per rapporto ad x, y, z tutte le volte che ρ sarà una funzione conosciuta di p, o avrà un valore costante.

12. In quest'ultimo caso, che è quello di un liquido omogeneo, si ottiene

$$\frac{p}{\rho} = V - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

bisognerebbe aggiungere una funzione arbitraria del tempo al secondo membro, ma si può riguardarla come racchiusa nella funzione φ, ed è inutile di scriverla.

L'equazione di continuità si riduce, in questo caso, a

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

o

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Questa equazione farà conoscere φ in funzione di x, y, z, e quando le funzioni arbitrarie saranno state determinate, si conosceranno u, v, w con la differenziazione della funzione φ.

13. Nel caso di un fluido aeriforme di cui la temperatura è costante, si ha $p=k\rho$, ed il primo membro dell'equazione (6) diviene $k\frac{dp}{p}$. Si ottiene dunque, integrando,

$$k \log p = V - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

da cui si può ricavare p in funzione di φ.

L'equazione (2) può mettersi sotto la forma

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} = 0,$$

e, rimettendovi il valore di p ricavato dalla precedente, si avrà un'equazione che determinerà φ e per conseguenza u, v, w. Nel caso in cui i movimenti dei punti del fluido sarebbero abbastanza rapidi perchè la temperatura si elevasse e si abbassasse successivamente in ciascun punto, la forza elastica non sarebbe più semplicemente proporzionale a ρ, essa dipenderebbe dall'accrescimento di temperatura, che può essere riguardato come proporzionale all'accrescimento della densità; p dipenderebbe dunque ancora da ρ, e reciprocamente. Il primo membro dell'equazione (6) potrebbe ancora essere integrato, e si agirebbe come nel caso precedente.

14. Se le funzioni u, v, w sono le derivate parziali di una funzione di x, y, z per un valore qualunque di t, bisogna che esse lo siano da principio per $t=0$; ciò che si riconoscerà facilmente, poichè i loro valori iniziali sono dati in funzione di x, y, z. Ora, Lagrange ha fatto vedere che, quando queste condizioni sono soddisfatte ad una certa epoca, esse lo sono ad un istante qualunque del movimento; risulta da ciò che, se si riconosce che esse lo sono nello stato iniziale, esse lo saranno indefinitamente, ed i calcoli precedenti saranno applicabili.

Andiamo a dimostrare questa importante proposizione.

Per ciò, divideremo il tempo in intervalli infinitamente piccoli, e calcoleremo di quanto aumenta l'espressione $udx+vdy+wdz$ in uno di questi intervalli, determinando gli accrescimenti che prendono u, v, w nello stesso tempo, per le equazioni generali del movimento dei fluidi. Ora, è chiaro che se $udx+vdy+wdz$ è ad ogni istante il differenziale di una funzione di x, y, z, è necessario che la quantità di cui esso aumenta sia sempre essa stessa un differenziale esatto; e reciprocamente, se ad una certa epoca questa espressione è un differenziale esatto e tutt'i suoi accrescimenti infinitamente piccoli successivi sono essi stessi dei differenziali esatti, accadrà lo stesso della loro somma e per conseguenza dell'espressione $udx+vdy+wdz$ ad un'epoca qualunque.

Siano dunque u_1, v_1, w_1 i valori di u, v, w ad una certa epoca per la quale $t=t_1$, ed ammettiamo che si abbia

$$u_1dx + v_1dy + w_1dz = d\varphi_1\,,$$

φ_1 essendo una funzione delle tre variabili indipendenti x, y, z. Considerando u, v, w come funzioni di x, y, z, t, i valori che esse avranno per $t=t_1+\varepsilon$ potranno essere sviluppati rispetto alle potenze di ε, e se si suppone questo accrescimento infinitamente piccolo, dovremo limitarci ai due primi termini, e si avrà

$$u = u_1 + u'\varepsilon, \quad v = v_1 + v'\varepsilon, \quad w = w_1 + w'\varepsilon,$$

u', v', w' essendo delle funzioni di x, y, z, che saranno le derivate parziali di u, v, w rispetto a t e relative a $t=t_1$.

Si deduce da ciò

$$udx+vdy+wdz=u_1dx+v_1dy+w_1dz+\varepsilon\,(u'dx+v'dy+w'dz).$$

Dunque se $u'dx+v'dy+w'dz$ è un differenziale esatto, sarà lo stesso di $udx+vdy+wdz$ all'epoca per la quale $t=t_1+\varepsilon$. Ora, le equazioni (1), considerate all'epoca in cui $t=t_1$, diventano

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - u' \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - v' \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy^2} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - w' \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dz^2},$$

Moltiplichiamo queste equazioni rispettivamente per dx, dy, dz e sommiamole. Il primo membro $\frac{dp}{\rho}$ sarà un differenziale esatto, sia nel caso dei liquidi omogenei, perchè ρ è allora costante; sia nel caso dei gas, perchè ρ è una funzione di p, la temperatura essendo supposta invariabile. Si può dunque rimpiazzare $\frac{dp}{\rho}$ con dP, P essendo una certa funzione di x, y, z; e, supponendo d'altronde che le forze esterne siano tali che $Xdx+Ydy+Zdz$ sia il differenziale di una certa funzione V di x, y, z, si otterrà

$$dP = dV - (u'dx + v'dy + w'dz)$$
$$- \frac{1}{2} d\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right],$$

da cui si ricaverà

$$u'dx + v'dy + w'dz$$
$$= d\left\{V - P - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right]\right\}.$$

Così $u'dx+v'dy+w'dz$ è il differenziale di una certa funzione delle tre variabili indipendenti x, y, z. Dunque, se $udx+vdy+wdz$ ne è uno ad una certa epoca, esso lo sarà ancora dopo che il movimento del fluido si sarà operato in virtù di tutte le azioni e tutte le circostanze, durante un tempo infinitamente piccolo. Partendo dallo stato del fluido a questa nuova epoca come dalla precedente, si dimostrerà similmente che $udx+vdy+wdz$ sarà ancora un differenziale esatto dopo un nuovo intervallo di tempo infinitamente piccolo, e così di seguito indefinitamente.

Segue da ciò che, se questa condizione è soddisfatta nello stato iniziale, ciò che si potrà sempre verificare immediatamente, si può essere sicuro che essa lo sarà ad ogni epoca del movimento. Se essa non lo fosse nello stato iniziale, è chiaro che non potrebbe esserlo ad un'epoca qualunque.

È bene di osservare che la condizione di cui si tratta sarà soddisfatta tutte le volte che le velocità saranno nulle in tutt'i punti nello stato iniziale; poichè allora si ha

$$udx + vdy + wdz = 0$$

che è un differenziale esatto.

15. Nel movimento semplicissimo di un liquido che gira uniformemente intorno ad un asse fisso, senza che i suoi punti cambiino di posizione relativa, $udx+vdy+wdz$ non è un differenziale esatto; poichè, dinotando con ω la velocità angolare costante, e prendendo l'asse di rotazione per asse delle z, si avrà

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0,$$

e, per conseguenza,

$$udx + vdy + wdz = \omega(xdy - ydx),$$

espressione che non è un differenziale esatto. Il caso di cui si tratta non può dunque essere trattato col procedimento particolare che abbiamo esposto, e bisogna ricorrere alle equazioni generali.

Si ha, in questo caso,

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \omega = 0,$$

e le equazioni (1) diventano

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \omega^2 x, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \omega^2 y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z,$$

da cui si deduce

$$\frac{dp}{\rho} = Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2(xdx + ydy),$$

equazione che non differisce da quella che abbiamo trovata nell'Idrostatica, Art. 8.

Movimento di un liquido in una ipotesi particolare.

16. Allorchè un liquido omogeneo, racchiuso in un vaso, scorre per un foro praticato nella base orizzontale, e piccolissimo rispetto alle sezioni orizzontali del vaso, l'esperienza mostra che le molecole situate in uno stesso strato orizzontale, ad un certo istante, vi restano costantemente finchè esse non sono vicinis-

sime al foro. Si possono trascurare le velocità orizzontali, allorchè le sezioni variano poco in tutta l'altezza del vaso, ed hanno delle dimensioni piccolissime rispetto a questa altezza; non vi sono più allora che due incognite, la velocità verticale e la pressione. Queste supposizioni, conosciute sotto il nome d'*ipotesi del parallelismo degli strati*, sono quelle che ammettiamo nella quistione che andiamo a trattare. Prendiamo l'asse delle x nella direzione del peso, avremo

$$Y=0, \quad Z=0, \quad X=g,$$

e le equazioni (1) si riducono, le due ultime a

$$\frac{dp}{dy}=0, \quad \frac{dp}{dz}=0,$$

ciò che indica che la pressione è la stessa per tutt'i punti di uno stesso strato orizzontale, e la prima a

$$(a) \qquad \frac{dp}{dx}=\rho\left(g-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}\right).$$

L'equazione di continuità (3) non potrebbe essere impiegata nel caso attuale, poichè essa racchiude le derivate di u, v, w; e quantunque v e w siano piccolissime rispetto ad u, non si può dire che le loro derivate possono essere trascurate per rapporto a quella di u. Ma si esprimerà ben semplicemente la continuità eguagliando la quantità di liquido che passa per uno strato qualunque a quella che esce dal foro durante uno stesso tempo infinitamente piccolo. Infatti, dinotiamo con ω l'area della sezione fatta nel vaso, ad una distanza x dall'origine; con Ω l'area del foro, e con U la velocità con la quale il liquido vi passa; le quantità di liquido che passano per le sezioni ω ed Ω durante lo stesso intervallo dt, sono rispettivamente $\omega u dt$ ed $\Omega U dt$; da ciò risulta la condizione

$$\omega u=\Omega U,$$

o

$$(b) \qquad u=\frac{\Omega U}{\omega};$$

i valori di u ed U riferendosi allo stesso valore di t, U è una funzione di t solamente, ω è una funzione di x data dalla forma del vaso, ed u è una funzione di x e di t. Se vi si fa variare t solamente, si hanno i valori successivi della velocità di differenti strati, nel momento in cui essi vengono a passare per una stessa sezione. Se x sola varia in u, si hanno le velocità di differenti strati nello stesso istante, e se vi si fanno variare ad un tempo

x e t senza stabilire dipendenza tra loro, si ha la velocità dello strato che passa a quest'altra epoca per un'altra sezione. Infine, se si vuol conoscere la velocità che avrà, dopo il tempo dt, lo strato che, per un valore dato di t e di x, ha una velocità u, bisognerà far variare t di dt, ed x di dx, supponendo $dx=udt$.

Per mezzo dell'equazione (b) si può eliminare u dall'equazione (a) ed introdurvi U che offre del vantaggio, in ciò che essa è funzione di una sola variabile t.

Si ottiene così

$$\frac{dp}{dx}=\rho\left(g-\frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt}+\frac{\Omega^2 U^2}{\omega^3}\frac{d\omega}{dx}\right).$$

Moltiplicando i due membri di questa equazione per dx, ed integrandoli per rapporto ad x, a partire dalla superficie superiore, si ottiene

$$p=g\rho x-\rho\Omega\frac{dU}{dt}\int\frac{dx}{\omega}-\frac{\rho\Omega^2 U^2}{2\omega^2}+C;$$

l'integrale $\int\frac{dx}{\omega}$ può essere supposto effettuato in ogni caso particolare, poichè ω è una funzione data di x; C è una quantità arbitraria indipendente da x e che può dipendere da t.

Ciò posto, si debbono considerare due casi differentissimi: quello in cui il livello del liquido sarebbe mantenuto alla stessa altezza, e quello in cui esso si abbasserebbe per l'efflusso del liquido che non sarebbe rinnovato; andiamo ad esaminarli successivamente.

17. Siano P la pressione costante esercitata sulla superficie superiore del liquido, P' la pressione esercitata sul liquido che esce dal vaso; si avrà sensibilmente $P'=P$ allorchè tutto l'apparecchio sarà compreso in uno stesso mezzo gassoso. Siano h la distanza del livello dall'origine delle x, ed l la sua distanza dal foro.

Determiniamo la costante dell'equazione precedente in modo che si abbia $p=P$ per $x=h$, troveremo

$$C=P-g\rho h+\rho\frac{\Omega^2 U^2}{2O^2},$$

O dinotando il valore di ω al livello del liquido.

Ne risulterà

$$(c)\qquad p=P+\rho g(x-h)-\rho\Omega\frac{dU}{dt}\int_h^x\frac{dx}{\omega}-\frac{\rho\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{O^2}\right);$$

se poniamo $$x = h + l,$$

ne risulterà $$p = P', \qquad \omega = \Omega;$$

se poniamo $$\int_h^{h+l} \frac{dx}{\omega} = m, \quad P - P' = g\rho\delta,$$

otterremo

$$g(l + \delta) = m\Omega \frac{dU}{dt} + \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{U^2}{2}; \tag{d}$$

ponendo $$1 - \frac{\Omega^2}{O^2} = \alpha^2, \quad \text{e} \quad 2g(l + \delta) = k^2,$$

α sarà una quantità pochissimo diversa dall' unità, e l' equazione precedente dà, risolvendola per rapporto a dt,

$$dt = \frac{2m\Omega\, dU}{k^2 - \alpha^2 U^2};$$

integrando i due membri, viene

$$t = \frac{m\Omega}{k\alpha} \log \frac{1}{C}\left(\frac{k + \alpha U}{k - \alpha U}\right),$$

C essendo una costante arbitraria che si determinerà col valore iniziale di U. Supponendo le velocità nulle quando $t = 0$, si ha $C = 1$, e l' equazione risoluta rispetto ad U diviene

$$U = \frac{k}{\alpha} \frac{1 - e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}}{1 + e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}},$$

U essendo determinata, si conoscerà u dall' equazione $u = \frac{\Omega U}{\omega}$, e p dall' equazione (c).

Il valore di U mostra che dopo un certo tempo, tanto più breve per quanto Ω sarà più piccolo, le esponenziali sono sensibilmente nulle, e per conseguenza il valore di U converge verso il limite $\sqrt{\frac{2g(l + \delta)}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}$, ed u e p verso dei limiti corrispondenti.

Se si trascura il quadrato di $\frac{\Omega}{O}$, il limite della velocità al foro sarà $\sqrt{2g(l+\delta)}$.

Ed infine, se $\delta = 0$, vale a dire se la pressione esterna è la stessa al foro ed al livello del liquido, la velocità al foro diviene $\sqrt{2gl}$. *Essa è dunque la stessa di quella che acquisterebbe un corpo pesante, cadendo nel vuoto da un' altezza eguale a quella del liquido nel vaso.*

La velocità U essendo divenuta costante, si ha $\frac{dU}{dt} = 0$, e l'equazione (c) si riduce a

$$p = P + \rho g(x - h) - \rho\frac{\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Ora, nello stato di equilibrio, la pressione sarebbe eguale a

$$P + \rho g(x - h).$$

Essa è dunque minore nello stato di movimento per le sezioni tali che si abbia $\omega < O$, vale a dire per quelle che hanno delle aree minori di quella della superficie libera del liquido; essa è, al contrario, maggiore che nello stato di equilibrio per quelle di cui le aree sono più grandi di O.

Se si vuol conoscere il volume di liquido che è uscito dal vaso alla fine del tempo t, basterà integrare $\Omega U dt$ tra 0 e t. Se si dinota questo volume con V, si trova facilmente

$$V = \frac{2m}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}} \log \frac{e^{\frac{k\alpha t}{2m\Omega}} + e^{-\frac{k\alpha t}{2m\Omega}}}{2}.$$

Alla fine di un certo tempo, si potrà trascurare la seconda esponenziale, e si avrà sensibilmente, rimettendo per k il suo valore $\sqrt{2g(l+\delta)}$,

$$V = \frac{\sqrt{2g(l+\delta)}}{\sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}}\, t - \frac{2m\log 2}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}.$$

Il primo termine è il volume che sarebbe uscito se la velocità fosse stata, fin dall'origine, eguale al suo limite

$$\frac{\sqrt{2g(l+\delta)}}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}.$$

18. Passiamo ora al caso in cui il liquido non essendo rinnovato, il livello si abbassa, ed h è una funzione incognita di t.

Le equazioni (a), (b), (c), (d) hanno sempre luogo; ma m ed O sono ora delle funzioni conosciute di h, ed l dipende da h per mezzo dell'equazione

$$h + l = a,$$

a dinotando la distanza costante del foro dall'origine delle x. Bisognerà a queste equazioni aggiungerne una che esprime che la quantità di liquido scorso durante un intervallo qualunque dt è eguale al volume compreso tra i due livelli corrispondenti al principio ed alla fine di questo intervallo. Questa equazione è

$$(e) \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\Omega U}{O}.$$

L'equazione (d) diviene, rimpiazzando l con $a-h$,

$$(f) \qquad g(a + \delta - h) = m\Omega \frac{dU}{dt} + \frac{\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Resta dunque ad integrare il sistema delle due equazioni simultanee (e) ed (f).

Se si elimina tra esse dt, si ottiene

$$g(a + \delta - h) = \frac{m\Omega^2}{O} U \frac{dU}{dh} + \frac{\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right),$$

o, ponendo $U^2 = 2gz$,

$$\frac{dz}{dh} + \frac{O}{m}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right) z + \frac{O}{m\Omega^2}(h - a - \delta) = 0,$$

equazione lineare del primo ordine rispetto a z, e che si potrà sempre integrare in ciascun caso, poichè O ed m saranno delle funzioni conosciute di h.

Allorchè z sarà conosciuta in funzione di h, si conoscerà U, e per conseguenza t dall'equazione (e); e reciprocamente h ed U saranno conosciute in funzione di t. Il valore di u sarà dato dall'equazione (b), e quello di (p) dall'equazione (c). La quantità di liquido scorso si determinerà calcolando il volume del vaso, compreso tra il livello iniziale ed il livello variabile, e la durata dell'efflusso totale si otterrà facendo $h=a$ nel valore di t.

19. Se si suppone Ω estremamente piccolo rispetto alle sezioni orizzontali del vaso, l'equazione (d) si semplifica molto. Infatti, si possono trascurare $\frac{\Omega}{O}$ ed $m\Omega$, tanto nell'ipotesi di un livello variabile che di un livello costante, a meno però che $\frac{dU}{dt}$ non sia grandissimo, ciò che ha luogo al principio del movimento. Si ottiene così

$$U^2 = 2g(l + \delta),$$

ciò che dà per U la velocità limite che avevamo trovata per t infinito.

Nella stessa ipotesi di un foro piccolissimo, i risultati sono sensibilmente gli stessi, qualunque sia la direzione del suo piano.

Ma, in tutt'i casi, la velocità data dall'esperienza, e che si calcola per mezzo dell'area del foro e della quantità d'acqua scorsa, è minore di quella che dà questa teoria nel rapporto di 0,62 all'unità. Questo rapporto essendo sensibilmente costante, le velocità reali sono sempre tra loro come le radici quadrate delle altezze di pressione.

Del movimento permanente di un liquido.

20. Allorchè si mantiene il livello di un liquido ad un'altezza costante, si ottiene, alla fine di un certo tempo, uno stato *permanente* nel quale tutte le circostanze restano le stesse allo stesso punto, e non variano che da un punto ad un altro. Così, in un punto qualunque, la velocità del liquido sarà costante in grandezza ed in direzione, e per conseguenza due molecole che ad epoche diverse hanno occupato una stessa posizione, percorreranno la stessa traiettoria ed in un modo identico.

Prendendo l'asse delle x nel senso della gravità, le equazioni fornite dal principio di D'Alembert saranno

$$\frac{dp}{dx} = \rho\,(g - u'), \quad \frac{dp}{dy} = -\,\rho v', \quad \frac{dp}{dz} = -\,\rho w',$$

u', v', w' essendo le derivate, rispetto al tempo, delle componenti della velocità in un punto qualunque. Dinotiamo con dx, dy, dz gli accrescimenti che hanno preso, dopo il tempo dt, le coordinate della molecola che era situata in quel punto; moltiplichiamo rispettivamente le equazioni precedenti per dx, dy, dz, e sommiamole, otterremo

$$dp = g\rho\, dx - \rho\,(u'dx + v'dy + w'dz)\,,$$

o, dinotando con V la velocità di questa molecola in un punto qualunque della sua traiettoria,

$$dp = g\rho\, dx - \frac{\rho}{2}\, d\cdot V^2\,;$$

integrando tra due punti qualunque di questa traiettoria, corrispondenti alle ascisse x_0, x, viene

$$(a) \qquad p - p_0 = g\rho\,(x - x_0) - \frac{\rho}{2}\,(V^2 - V_0^2),$$

p_0, V_0 essendo i valori di p, V nel primo di questi due punti. Questa equazione ci condurrà ad un risultato notevole, già ottenuto nella discussione della quistione precedente dove si ammettevano delle ipotesi più particolari di quelle che ammettiamo qui. Infatti, supponiamo che la superficie libera del liquido sia rigorosamente piana e sottomessa in tutt'i suoi punti ad una pressione eguale e costante P, e contiamo le x a partire da questo piano. Se nell'equazione (a) facciamo

$$x_0 = 0, \quad p_0 = P,$$

il primo dei due punti che si consideravano sulla traiettoria sarà preso alla superficie superiore del liquido; si avrà allora

$$p - P = g\rho x - \frac{\rho}{2}(V^2 - V_0^2).$$

Ora, se il vaso ha un piccolissimo foro nella parte inferiore, ad una distanza h al di sotto del livello superiore, si potrà ammettere che in tutta l'estensione di questo foro la velocità di tutt'i punti è la stessa; di maniera che per $x=h$ non vi sia che un solo valore per V. Se, di più, si riguarda la pressione esterna come minore di quella alla parte superiore di una quantità $g\rho\delta$, l'equazione precedente diviene, facendo $x=h$,

$$-g\rho\delta = g\rho h - \frac{\rho}{2}(V^2 - V_0^2),$$

o

$$V^2 - V_0^2 = 2g(h + \delta).$$

Sia k il rapporto dell'area del foro all'area della sezione del vaso fatta dal piano del livello superiore; si avrà

$$V_0 = kV, \text{ e per conseguenza } V^2(1 - k^2) = 2g(h + \delta),$$

onde

$$V = \sqrt{\frac{2g(h + \delta)}{1 - k^2}};$$

se k è piccolissimo, k^2 potrà essere trascurato, e si avrà semplicemente

$$V = \sqrt{2g(h + \delta)},$$

e se la pressione è sensibilmente la stessa nella parte superiore del liquido ed al foro, si potrà trascurare δ, e si avrà

$$V = \sqrt{2gh}.$$

Si ricade così sui risultati ottenuti precedentemente.

CAPITOLO II.

Movimento di un fluido elastico etc.

21. *Efflusso di un fluido elastico.* Ammetteremo ancora l'ipotesi del parallelismo degli strati, e la questione sarà presso a poco simile alla precedente; solamente sarà permesso di fare astrazione dalla gravità che non influisce sensibilmente sulle pressioni.

L'equazione (a) si troverà con ciò ridotta a

$$\frac{dp}{dx} + \rho\frac{du}{dt} + \rho u\frac{du}{dx} = 0.$$

Per ottenere l'equazione di continuità, si considereranno due sezioni orizzontali corrispondenti ad x ed $x+dx$, e si cercherà la massa del fluido che vi s'introduce durante il tempo dt per la faccia superiore, e quella che ne esce nello stesso tempo per la faccia inferiore; l'eccesso della prima quantità sulla seconda, diviso per il volume ωdz, darà l'accrescimento parziale della densità rispetto al tempo. Si troverà così

$$\omega\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\cdot\rho\omega u}{dx} = 0.$$

Infine, supponendo la temperatura costante, si avrà

$$p = k\rho,$$

k essendo una costante data.

Queste tre equazioni determinano p, ρ ed a in funzione di t ed x.

Se si elimina ρ, si avrà

$$\frac{k}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} = 0, \qquad \frac{dp}{dt} + \frac{d\cdot p\omega u}{dx} = 0.$$

Queste equazioni ai differenziali parziali non sono integrabili sotto forma finita. Ma ciò che è sopratutto importante di conoscere si è la velocità dell'efflusso, allorchè la pressione e la velocità sono divenute costanti in ciascun punto: ciò che accade molto prontamente, supponendo che il vaso comunichi con un serbatoio che rinnova il gas e determina nella parte superiore una pressione costante.

Si ha allora $\frac{du}{dt}=0$, $\frac{dp}{dt}=0$, e le equazioni precedenti diventano

$$\frac{kdp}{pdx}+u\frac{du}{dx}=0;\qquad \frac{d\cdot p\omega u}{dx}=0.$$

Gl' integrali di queste due equazioni sono

$$p\omega u=c,\quad k\log p+\frac{u^2}{2}=c',$$

c e c' dinotando delle costanti arbitrarie.

Siano P, U, O la pressione, la velocità e l'area della sezione, relative alla parte superiore del vaso; P', U', O' i loro valori al foro, si avrà

$$P\,U\,O=c,\quad 2k\log P+U^2=2c',$$

$$P'U'O'=c,\quad 2k\log P'+U'^2=2c'.$$

Queste quattro equazioni determineranno le costanti c, c' del pari che le velocità del fluido al foro ed al vertice.

Eliminando c e c', si ottiene

$$U'=\frac{PO}{P'O'}\cdot U,\quad U'^2=U^2+2k\log\frac{P}{P'};$$

ed eliminando U', si trova

$$U=\sqrt{\frac{2k\log\frac{P}{P'}}{\frac{P'^2\,O'^2}{P^2\,O^2}-1}}.$$

Il foro O' essendo minore di O, e la pressione P' essendo anche minore di P, senza di che l'efflusso non avrebbe luogo, i due termini della frazione sotto il radicale sono positivi, ed U è necessariamente reale. Il valore di U' si deduce da quello di U, e si trova

$$U'=\sqrt{\frac{2k\log\frac{P}{P'}}{1-\frac{P'^2\,O'^2}{P^2\,O^2}}}.$$

I valori di c, c' se ne deducono facilmente, e per conseguenza i valori di p ed u saranno determinati in funzione di ω e per conseguenza di x.

Se si suppone $\frac{O}{O'}$ piccolissimo, si avrà U piccolissimo, ed $U' = \sqrt{2k \log \frac{P}{P'}}$. Tale è la velocità dell'efflusso di un gas per un piccolissimo foro, allorchè le pressioni P, P', nella parte superiore ed al foro, sono costanti.

Nozioni sulla resistenza dei fluidi.

22. Allorchè un corpo solido si muove in un fluido, esso prova una resistenza che dipende dalla sua forma, dalla sua velocità, e dalla natura del fluido. Le pressioni esercitate sopra i differenti punti della superficie sono diversissime da quello che sarebbero nello stato di equilibrio, ed il calcolo non ha potuto ancora esservi applicato con successo. Le esperienze non hanno neanche dato delle leggi empiriche abbastanza generali per essere suscettibili di applicazioni utili nel caso di corpi di forma qualunque. Si hanno intanto alcuni risultati abbastanza generali relativamente alla resistenza dei liquidi in movimento contro piani che si muovono parallelamente a loro stessi. Questi risultati e le esperienze da cui sono stati dedotti riferendosi al corso sulle macchine, non ce ne occuperemo qui, e ci limiteremo ad un caso che può essere trattato col calcolo, e che ha per oggetto la pressione esercitata da una vena liquida contro un piano.

23. *Pressione di una vena liquida sopra un piano.* Supponiamo un liquido di cui la densità sia ρ, che scorre da un foro di cui l'area sia ω, in modo che la velocità di tutte le molecole che passano pel foro siano eguali, parallele ed indipendenti dal tempo, e facciamo astrazione dalla gravità, per non considerare che l'effetto dovuto alla velocità del liquido. Il movimento di questa vena è modificato da un piano fisso, o mobile restando parallelo a sè stesso; e si suppone che il liquido scorra lungo il piano, e che questo sia abbastanza prolungato perchè tutte le molecole abbiano acquistato, prima di lasciarlo, delle velocità parallele a questo piano. Si domanda quale sforzo sarà necessario per mantenere il piano in quiete, o in uno stato dato di movimento uniforme.

Consideriamo da principio il caso in cui il piano sarebbe in riposo e perpendicolare alla direzione della vena fluida, e, per rappresentarci più comodamente il sistema dei punti in movimento, supponiamo che la vena fluida abbia una lunghezza indefinita ed una velocità costante v. Le cose si passano come se

fosse così, e potremo più facilmente applicare i principii generali del movimento. Le molecole del liquido, tanto prima che dopo l'incontro del piano, formano un sistema di punti liberi, sottomesso alle loro azioni scambievoli ed alle forze normali esercitate sopra una parte di esse dal piano.

Si avrà dunque, supponendo l'asse delle x positivo nel senso del movimento del liquido,

$$\Sigma X\, d\lambda = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

dinotando con X la forza prodotta dall'elemento $d\lambda$ della superficie del piano, e che è eguale e contraria alla pressione che il fluido esercita sopra di esso. Dinotando con R la somma di tutte queste pressioni elementari, o la resistenza totale del piano, si avrà

$$R = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Lo stato del sistema essendo divenuto invariabile, integriamo i due membri di questa equazione rispetto al tempo, tra due epoche lontane l'una dall'altra di una unità di tempo, otterremo

$$R = \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0,$$

il secondo membro essendo la differenza tra le componenti, perpendicolari al piano, delle quantità di movimento di tutt'i punti del liquido a queste due epoche. Ora, tutt'i punti in cui le velocità perpendicolari al piano sono variabili, formando a ciascun istante un sistema identico, ne segue che il valore di questo secondo membro non è altra cosa che la differenza tra le componenti delle quantità di movimento della parte del liquido che ha lasciato il piano e di quella di cui la vena indefinita è stata diminuita. Ora, la prima quantità è nulla, poichè il liquido lascia il piano con una velocità di cui la componente normale al piano è nulla; non resta dunque che la seconda quantità, di cui il valore è il prodotto della quantità di liquido scorso nell'unità di tempo, o $\rho\omega v$ per la velocità v che essa aveva, ciò che dà $\rho\omega v^2$.

L'equazione precedente diviene così

$$R = -\rho\omega v^2.$$

La pressione eguale e contraria che prova il piano è dunque

$$\rho\omega v^2.$$

24. Supponiamo ora che il piano si trasporti parallelamente a sè stesso, e che non produca in ciascun punto che delle forze normali, sarà inutile di aver riguardo alla componente della sua velocità nel senso del piano stesso, e ci limiteremo a considerare la velocità normale u, che si riguarderà come positiva quando sarà nello stesso senso di v, e come negativa nel caso contrario. Ora, non si cambierà nulla alle pressioni dando un movimento comune a tutt' i punti del sistema, e per conseguenza si potrà ridurre il piano in quiete, ciò che ricondurrà al caso precedente. Basterà per ciò di aggiungere $-u$ alla velocità di ciascun punto, e si è nello stesso caso come se, il piano essendo in riposo, la velocità del liquido al foro fosse $(v-u)$; si avrà dunque, per l'espressione della resistenza opposta al piano, $\rho\omega(v-u)^2$.

25. Supponiamo finalmente che il piano faccia con la direzione della vena un angolo qualunque θ, e si muova parallelamente a sè stesso. Decomponiamo la sua velocità in due altre; l'una nel senso stesso di questo piano, e che si può trascurare; l'altra parallela alla direzione della vena. Dinotiamo quest'ultima con u e diamo al sistema intero una velocità eguale e contraria. Il piano diverrà immobile e la velocità del liquido sarà ridotta a $(v-u)$.

Ciò posto, se prendiamo l'asse delle x perpendicolare al piano fisso, avremo sempre l'equazione

$$\Sigma X d\lambda = \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \frac{dx_0}{dt},$$

e lo stato del liquido essendo divenuto invariabile, il secondo membro si ridurrà ancora alla massa scorsa durante l'unità di tempo, o $\rho\omega(v-u)$, moltiplicata per la componente della velocità $(v-u)$ perpendicolarmente al piano, o $(v-u)\operatorname{sen}\theta$. La pressione esercitata sul piano mobile è dunque $\rho\omega(v-u)^2 \operatorname{sen}\theta$. Si può dare un'altra forma a questa espressione dinotando con a la velocità del piano valutata secondo la normale. Si ha allora $u = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta}$, e la pressione diviene allora $\rho\omega \frac{(v \operatorname{sen}\theta - a)^2}{\operatorname{sen}\theta}$; se il piano è in riposo si ha $a=0$, e la pressione si riduce a $\rho\omega v^2 \operatorname{sen}\theta$.

Queste formole sono dimostrate, con altre considerazioni, nella Memoria di Coriolis *sul principio delle forze vive nei movimenti relativi delle macchine*. Journal de l'École Polytechnique, XXI cahier.

Calcolo dei piccoli movimenti dei fluidi elastici.

26. Allorchè tutt'i punti di un fluido non hanno che dei movimenti estremamente piccoli, le equazioni generali si semplificano molto, e conducono ad alcune leggi semplici che andiamo ad esporre.

Supporremo che l'espressione $udx+vdy+wdz$ sia a ciascun istante il differenziale di una funzione φ di x, y, z, t, preso solamente rispetto alle variabili x, y, z. Sappiamo che basta per ciò che, nello stato iniziale, le componenti conosciute u, v, w della velocità di un punto qualunque siano le derivate parziali, rispetto ad x, y, z, di una stessa funzione di queste tre variabili considerate come indipendenti; ciò che avrà luogo in particolare se le velocità iniziali sono nulle. Dovremo dunque, nelle questioni che andiamo a studiare, fare uso dell'equazione (6) del numero 11; ed andiamo da principio ad operarvi le semplificazioni che risultano dall'ipotesi che i movimenti restino piccolissimi.

Siano D la densità del gas nel suo stato naturale di equilibrio, quella del mercurio essendo presa per unità; p_0 la forza elastica di questo gas, h l'altezza del mercurio che la misura, e g la gravità; si avrà

$$p_0 = gh.$$

Dinotiamo con ρ la densità variabile del gas, con γ la sua condensazione positiva o negativa, e con p la sua forza elastica, si avrà

$$\rho = D(1+\gamma),$$

e, supponendo la temperatura eguale a quella dello stato iniziale,

$$p = gh(1+\gamma).$$

Ma la condensazione sviluppa una certa quantità di calore che le è proporzionale, se essa è piccolissima, come supponiamo. Questo calore non ha il tempo di spandersi se le alternative di dilatazione e di condensazione si succedono rapidamente, come ciò ha luogo nelle questioni che ordinariamente si esaminano; si deve dunque considerarlo come avendo per effetto di elevare la temperatura dei punti in cui esso si è svolto di una quantità dello stesso segno della condensazione, e proporzionale alla sua grandezza. Nel caso in cui il calore avrebbe il tempo di dissiparsi nel mezzo, non se ne terrebbe conto nel calcolo. Se si rappresenta con θ il numero positivo o negativo di gradi centesimali di cui si eleva la temperatura primitiva u del gas, per una condensazione γ; con c e c' i calori specifici del gas a pressione costante

ed a volume costante, e con α il coefficiente di dilatazione di questo gas, si dimostra in fisica che queste quantità hanno tra loro la relazione seguente:

$$\alpha\theta = \gamma\left(\frac{c}{c'} - 1\right),$$

si avrà, di più, la proporzione

$$p : p_0 :: D(1+\gamma)\left[1 + \alpha(v+\theta)\right] : D(1+\alpha v),$$

da cui si ricava, rimpiazzando p_0 con gh e trascurando le potenze di α superiori alla prima, ed il prodotto delle quantità piccolissime γ, θ,

$$p = gh(1 + \gamma + \alpha\theta),$$

o, rimpiazzando $\alpha\theta$ col suo valore in funzione di γ,

$$p = gh\left(1 + \gamma\frac{c}{c'}\right),$$

da cui
$$\frac{dp}{\rho} = \frac{ghc}{Dc'}\frac{d\gamma}{1+\gamma}.$$

L'equazione (6) diviene così

$$\frac{ghc}{Dc'}\log(1+\gamma) = -\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Ora, supponendo che le condensazioni e le velocità iniziali siano delle quantità estremamente piccole dello stesso ordine, e che sia lo stesso ad un'epoca qualunque, si potranno trascurare i quadrati delle componenti $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ rispetto a $\log(1+\gamma)$, che può essere rimpiazzato da γ, e l'ultima equazione si riduce a

$$\frac{ghc}{Dc'}\gamma = -\frac{d\varphi}{dt},$$

o, ponendo $\frac{ghc}{Dc'} = a^2$,

$$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{1}$$

L'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\cdot\rho u}{dx} + \frac{d\cdot\rho v}{dy} + \frac{d\cdot\rho w}{dz} = 0$$

diviene da principio

$$\frac{d\gamma}{dt}+\frac{d\cdot(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dx}}{dx}+\frac{d\cdot(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dy}}{dy}+\frac{d\cdot(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dz}}{dz}=0,$$

o, trascurando i termini piccolissimi rispetto a quelli che sussistono nell'equazione,

$$(2) \qquad \frac{d\gamma}{dt}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.$$

Le equazioni (1) e (2) determinano γ e φ. Se si elimina tra esse γ, si ottiene

$$(3) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right).$$

Si è dunque condotto all'integrazione di una equazione differenziale parziale del secondo ordine, lineare ed a coefficienti costanti. Le funzioni arbitrarie si determineranno dai valori iniziali di φ e $\frac{d\varphi}{dt}$, e non vi saranno altre condizioni se il fluido è indefinito in tutti i sensi. Nel caso contrario, vi sono, come sappiamo, delle equazioni particolari ai limiti, che aumentano molto le difficoltà del calcolo.

Il valore iniziale di $\frac{d\varphi}{dt}$ è conosciuto da quello di γ che è un dato necessario. In quanto a quello di φ, esso risulta dai valori iniziali delle componenti della velocità, $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, che sono necessariamente dati. Queste tre funzioni di x, y, z determinano, a meno di una costante, la funzione φ; e siccome questa costante non può avere alcuna influenza sulle quantità cercate, che si ottengono tutte con la differenziazione della funzione φ, non se ne deve tenere alcun conto, e si può considerare la funzione generale φ come conosciuta allorchè vi si fa $t=0$.

Il problema di meccanica è dunque ridotto ad una questione di calcolo integrale di cui i dati sono completi.

27. *Sovrapposizione degli effetti.* Se in questo fluido, supposto indefinito in tutt'i sensi, si concepiscono diversi stati iniziali ed i movimenti parziali che loro corrisponderebbero, e soddisfarebbero all'equazione (3), è facile di riconoscere che, se si considera un nuovo stato iniziale risultante dalla composizione dei primi, il movimento corrispondente potrà essere ottenuto ad un'epoca

qualunque per mezzo della composizione dei movimenti parziali relativi alla stessa epoca; questa composizione essendo intesa nel senso ordinario per le velocità, e consistendo in un'addizione algebrica per le condensazioni. Infatti, siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ i valori di φ corrispondenti ai movimenti parziali, e che soddisfano separatamente all'equazione (3); poniamo

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots$$

La funzione φ soddisfarà essa stessa all'equazione (3), e rappresenterà per conseguenza, un movimento particolare del fluido. La sua derivata rispetto a t sarà la somma di quelle delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Considerandole tutte per il valore $t=0$, se ne conchiuderà da principio che la condensazione iniziale del fluido nel movimento rappresentato da φ è la somma delle condensazioni iniziali relative ai diversi movimenti parziali; e, di più, le derivate di φ rispetto ad x, y, z saranno le somme di quelle delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$; e se vi si fa $t=0$, se ne conclude che nel movimento rappresentato da φ, le velocità iniziali di ciascuna molecola si ottengono componendo quelle che si riferiscono alla stessa molecola negli stati iniziali parziali. Dunque lo stato iniziale del fluido nel movimento rappresentato da φ è identico per le condensazioni e per le velocità a quello che ci proponevamo di determinare; questi due movimenti sono dunque identici ad un'epoca qualunque. Se ora, invece di fare $t=0$ nelle funzioni $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, si attribuisce a questa variabile un valore qualunque, queste funzioni saranno sempre le somme di quelle che corrispondono a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Dunque infine le condensazioni e le componenti della velocità nel movimento cercato saranno ad ogni istante le somme algebriche di quelle che si osserverebbero alla stessa epoca, e rispettivamente agli stessi punti, nei movimenti determinati dagli stati iniziali parziali.

FINE.

OPERE DI PROPRIA EDIZIONE.

HESSE O. — I Determinanti elementarmente esposti. Traduzione del Dottor Valeriani Valeriano, 1 vol. in 8°. Napoli 1873 . . . . L.	1. 50
SALMON G. — Trattato analitico delle sezioni coniche, contenente un cenno dei più importanti metodi moderni Algebrici e Geometrici; versione dall'inglese del Prof. N. Salvatore Dino, 1 vol. in 8° con figure intercalate nel testo. Napoli 1868 . . . . »	8. —
— Geometria a tre coordinate, compendio dell'opera del Salmon per N. Salvatore Dino, 1 vol. in 8° con figure intercalate nel testo. Napoli 1870 . . . . »	3. 50
Prezzo complessivo delle suddette due opere . . »	10. —
— Teorica delle curve piane di grado elevato, versione del Prof. V. Janni, 1 vol. in 8°. Napoli 1857 . »	3. 50
TODHUNTER I., M. A. — Trattato del calcolo differenziale e integrale e le sue applicazioni, con molti esempii, versione dall'inglese, con aggiunte, per G. Battaglini, (Prof. di geometria superiore nella R. Università di Napoli). 2 vol. in 8° con figure intercalate nel testo. Napoli 1870 . . . . »	12. —
— Elementi di Algebra, versione dall'inglese del Prof. O. Porcelli, 2.ª ediz. 1 vol. in 12°. Napoli 1873. »	3. —
— Teoria delle Equazioni, versione dall'inglese del Prof. G. Battaglini, 1 vol. in 8°. Napoli 1872 . . . »	6. —
LOBATSCHEWSKY. — Pangeometria o Sunto di geometria, fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele, versione del Prof. G. Battaglini. in 4°. Napoli 1869 »	3. 50
BOLYAI G. — Sulla scienza assoluta dello spazio, versione dal latino del Prof. G. Battaglini, in 4°. Napoli 1868 »	1. 50
JANNI V. — Trattato elementare di geometria analitica, 2.ª ediz. 2 vol. in 8°. Napoli 1865. . . . . . »	6. —
MORLEO G. — *(Professore nel Collegio militare di Napoli)*. Trattato elementare di aritmetica 2ª ediz. Napoli 1873 1 vol. in 8°	3. —

GIORNALE DI MATEMATICHE *ad uso degli Studenti delle Università Italiane*, compilato per cura dei Prof. G. BATTAGLINI ed E. FERGOLA, in unione dei Prof. E. D'OVIDIO, G. TORELLI e C. SARDI.

Si pubblica per fascicoli bimensili di pag. 64 in 8° gr.	
In corso l'anno XI° 1873. Ann. antic. per Napoli L.	12. —
Pel resto d'Italia . . . . »	14. —
Collezione 1863 a 1872, 10 vol. . . . . »	90. —

Stabilimento A. Trani, Conte di Mola 13.